Institutionen för Mekanik
Christer Nyberg
Hanno Essén
Nicholas Apazidis

2011-08-22

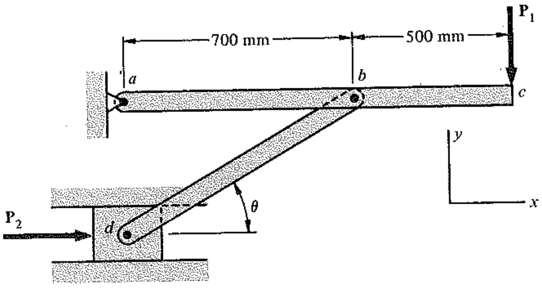
Tentamen i SG1130 och SG1131 Mekanik, baskurs

Varje uppgift ger högst 3 poäng. **Inga hjälpmedel.** Skrivtid: 4 h

OBS! Uppgifterna 1- 8 skall inlämnas på **separata** papper. ***Lycka till!***

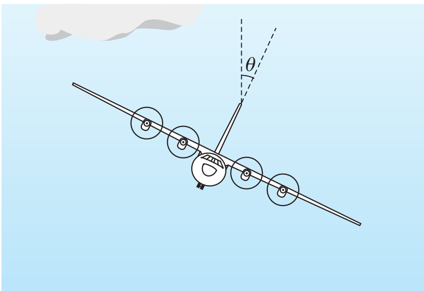
Problem

1)



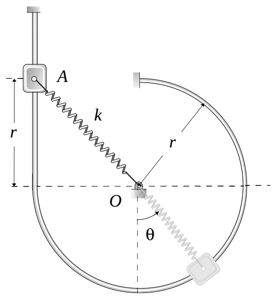
I figuren visas en plan mekanism som består av lätta stänger *abc* och *bd* förenade med en glatt led i *b*. Stången *ac* kan rotera kring en fix led i *a*. I *d* är *bd* fäst i en glatt led på ett lätt glidblock som kan röra sig horisontellt. En kraft P_1 verkar vertikalt uppifrån vid *c* och en annan kraft P_2 verkar horisontellt åt höger på glidblocket. Bestäm tangens för vinkeln θ så att $P_1 / P_2 = 10$ ger jämvikt.

2)



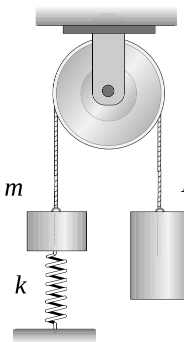
Ett flygplan som väntar på ett landningstillstånd kretsar kring flygplatsen med en konstant fart v på konstant höjd i en cirkulär bana med radien R. Bestäm flygplanets lutningsvinkel θ.

3)



En liten hylsa med massan m kan glida lätt på en stång i vertikalplanet. Stången består av en rak del och en del med krökningsradien r. Hylsan är med en fjäder med fjäderkonstant k och naturlig längd r förenad med den fixa centrumpunkten O. Den släpps från vila i det läge A som markerats i figuren. Bestäm den normalkraft som verkar från stången på hylsan, när hylsan passerar det läge som ges av vinkeln θ.

4)



Två tyngder med massorna m och M sitter i ändpunkterna av en oelastisk tråd, som går över en fix glatt cylinder. En fjäder med fjäderkonstanten k sitter fast i den ena tyngden och i golvet. Ställ upp rörelseekvationen för den högra tyngden och bestäm svängningstiden för systemets små svängningar.

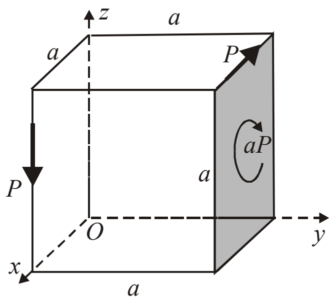
V.g. vänd!

Teori

5) a. Betrakta ett kraftsystem bestående av krafterna $\mathbf{F}_k$ $(k = 1,\ldots,n)$ angripande i punkterna P_k $(k = 1,\ldots,n)$ och härled sambandsformeln för kraftmomenten med avseende på två punkter A och B, dvs. $\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$. (1p)

b. Visa att komponenten M_λ av kraftmomentet av en kraft angripande i A med avseende på axeln λ är oberoende av momentpunkten på axeln. (1p)

c.

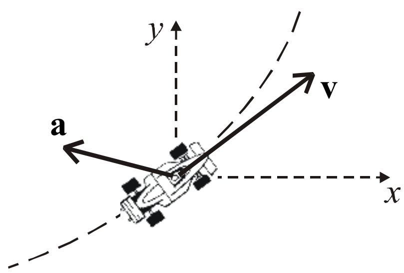


Betrakta kraftsystemet som verkar på kuben med sidan a i figuren och ersätt detta med ett ekvimoment kraftsystem bestående av *en* kraft som angriper i O och ett kraftmoment. Bestäm denna kraft och kraftmoment.

(1p)

6) a. Härled hastighetens och accelerationens komponenter i cylinderkoordinater. Det krävs att ortsvektorn (lägevektorn) anges och att enhetsvektorernas tidsderivator härleds. (2p)

b.



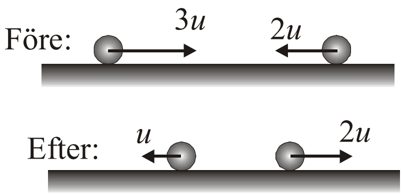
Betrakta bilen som färdas genom en kurva. I det betraktade ögonblicket är bilens hastighet $\mathbf{v} = (4,3,0)\ \mathrm{m/s}$ och dess acceleration $\mathbf{a} = (-2,1,0)\ \mathrm{m/s^2}$.
För detta ögonblick bestäm bilens fartändring $\dot{v}$.

(1p)

7) a. Definiera vad som menas med en konservativ kraft . (1p)

b. Härled uttrycket för den allmänna gravitationskraftens $\mathbf{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r$, potentiella energi $V(r)$. (1p)

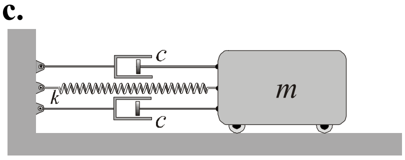
c.



Betrakta två lika partiklar, vardera med massan m som rör sig friktionsfritt på ett glatt horisontellt underlag med hastigheterna $3u$ resp $2u$ mot varandra och sammanstöter. Efter stöten är partiklarnas hastigheter enligt figuren. Bestäm studstalet e. (1p)

8) a. Rita en tydlig figur och härled uttrycket för sektorhastigheten $\dot{A}$ vid centralrörelse. Visa vidare att den är konstant . (2p)

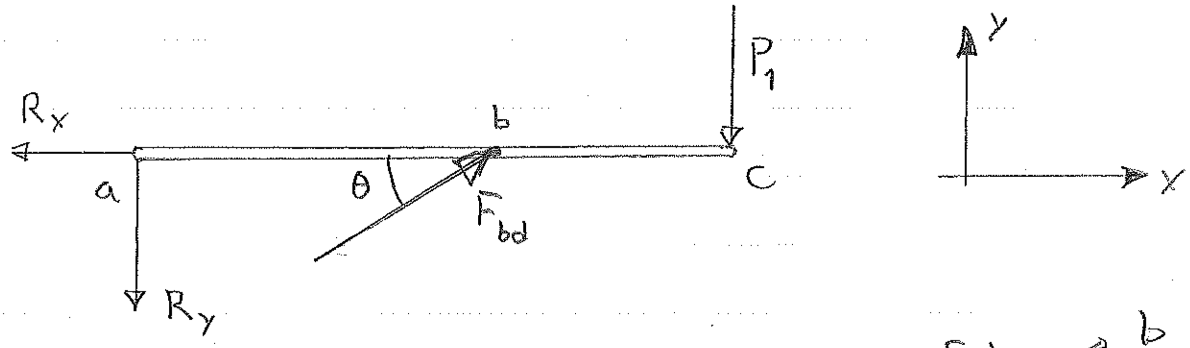
c.

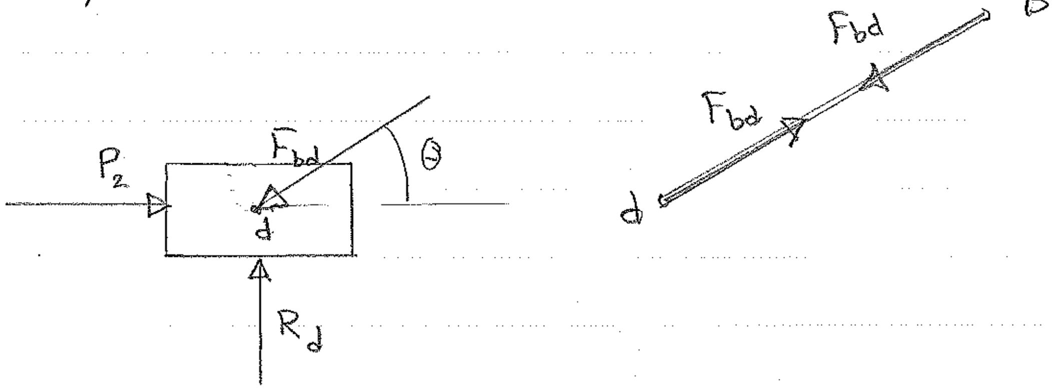


Betrakta vagnen med massan m som kan röra sig friktionsfritt längs ett horisontellt underlag. En lätt fjäder med fjäderkonstanten k och två dämpare med dämpningskonstanten c vardera är fästa i vagnen och i den vertikala väggen. Bestäm sambandet mellan c, m och k vid kritisk dämpning. (1p)

LÖSNING PROBLEM 1   20110822   SG1130,31,09

FRILÄGG ac och glidblock d:





Kroppen bd är en tvåkraftskropp med F_{bd} i vardera änden. Newtons 3:dje ger då enl. fig. Jämvikt för ac ger

$$\sum M_a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{bd}\sin\theta \cdot 700 - P_1 \cdot 1200 = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{bd} = \frac{P_1}{\sin\theta} \cdot \frac{12}{7} \qquad (1)$$

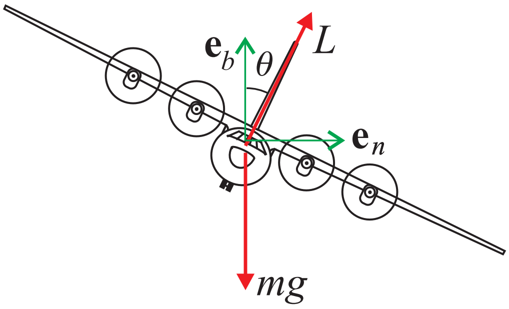
För glidblocket fås, i x-led,

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad P_2 - F_{bd}\cos\theta = 0$$

$\Rightarrow P_2 = \frac{12}{7}\frac{P_1}{\tan\theta}$ (2)   Med $P_1/P_2 = 10$ fås

ur (2) : $10 = \frac{7}{12}\tan\theta$ $\Rightarrow$ <u>Svar</u>: $\tan\theta = \frac{120}{7} \approx 17{,}1$

Lösning till uppgift 2 SG1130, 1131 Mekanik, 2011-08-22



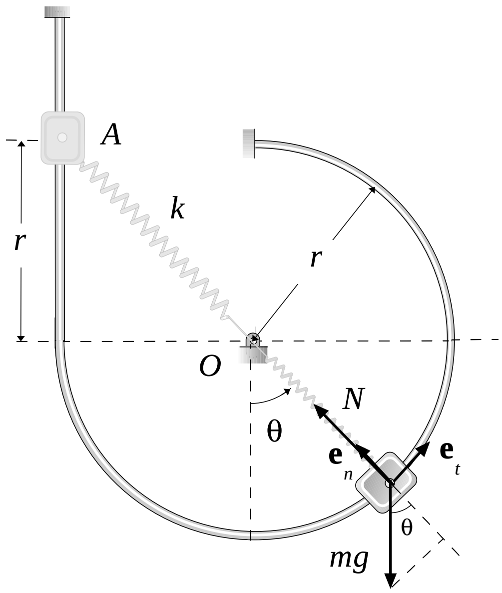
1) Inför tyngd- och lyftkrafterna på flygplanet och projicera kraftekvationen på normal- och binormalriktningen

$$\mathbf{e}_n: \quad m\frac{v^2}{R} = L\sin\theta$$

$$\mathbf{e}_b: \quad 0 = L\cos\theta - mg \quad \Rightarrow \quad L = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Insättning av detta uttryck för lyftkraften i den första ekvationen ger den sökta vinkeln enligt

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta = \arctan\frac{v^2}{gR}}}$$



De krafter som verkar på hylsan vid dess cirkelrörelse är tyngdkraften mg och normalkraften från stången. En kraft söks och det är då rimligt att anta att kraften skall kunna bestämmas med kraftekvationen. Vi väljer här

kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ i det naturliga systemet:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_t \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \end{cases} \tag{1}$$

där $\rho = r$ är krökningsradien och $\dot{s} = v$ är hastigheten

Insättning i (1b) ger

$$m\frac{v^2}{r} = N - mg\cos\theta \tag{2}$$

Normalkraften ges alltså av ekv (2) om vi bara kan bestämma vänsterledet, dvs i princip gäller det att bestämma farten. Det går att bestämma den med en första integral till (1a) men det är enklare att ställa upp lagen om den mekaniska energins bevarande

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{3}$$

Normalkraften gör inget arbete. Låt referensnivån för tyngdkraften vara i nivå med centrumpunkten. Fjädern har en potentiell energi i startögonblicket. Insättning ger

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgr\cos\theta + 0 = 0 + mgr + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{2}\,r - r\right)^2 \tag{4}$$

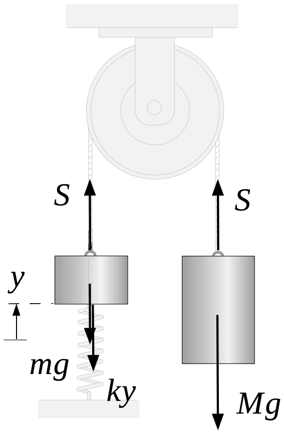
$$mv^2 = 2mgr(1+\cos\theta) + kr^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \tag{5}$$

Insättning i ekv (2) ger resultatet

$$N = 2mg(1+\cos\theta) + kr\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + mg\cos\theta$$

$$N = mg(2 + 3\cos\theta) + kr\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

/CN



Frilägg kropparna! De påverkas av trådkraft, tyngdkraft och fjäderkraft. Trådkraften är lika stor i alla delar av tråden, eftersom cylindern är glatt. Låt y vara fjäderns förlängning räknat från den naturliga längden! Fjäderkraften är då ky. Om den vänstra kroppen rör sig uppåt kommer den högra att röra sig lika mycket neråt. Kropparnas accelerationer är alltså lika stora.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ för vardera kroppen:

vänstra $\uparrow: \quad m\ddot{y} = S - ky - mg \qquad (1)$

högra $\downarrow: \quad M\ddot{y} = -S + Mg \qquad (2)$

Om ekvationerna adderas fås

$$(M+m)\ddot{y} = -ky + (M-m)g \qquad (3)$$

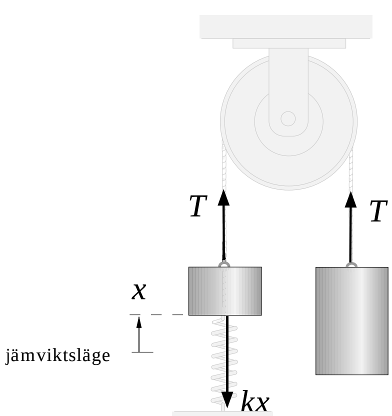
Svängningsekvationen skrivs på standardform:

$$\ddot{y} + \frac{k}{M+m}y = \frac{M-m}{M+m}g \qquad (4)$$

Jämför nu med den allmänna svängningsekvationen: $\ddot{y} + \omega_n^{\,2} y = \text{konstant}$!

Identifiering ger $\omega_n^{\,2} = \dfrac{k}{M+m} \qquad (5)$

Svängningstiden $\tau_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$ blir då $\underline{\underline{\tau_n = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}}}$



Man kan direkt eliminera de statiska krafterna, alltså tyngdkrafterna, fjäderkraften vid jämvikt samt de trådkrafter som finns vid jämvikt. Låt T vara ökningen av trådkraften räknat från jämviktsvärdet. Den dynamiska fjäderkraften är kx. Kraftekvationen ger nu

$\uparrow: \quad m\ddot{x} = T - kx \qquad (2)$

$\downarrow: \quad M\ddot{x} = -T \qquad (3)$

Om ekvationerna adderas fås

$$(M+m)\ddot{x} = -kx \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{k}{M+m}x = 0$$