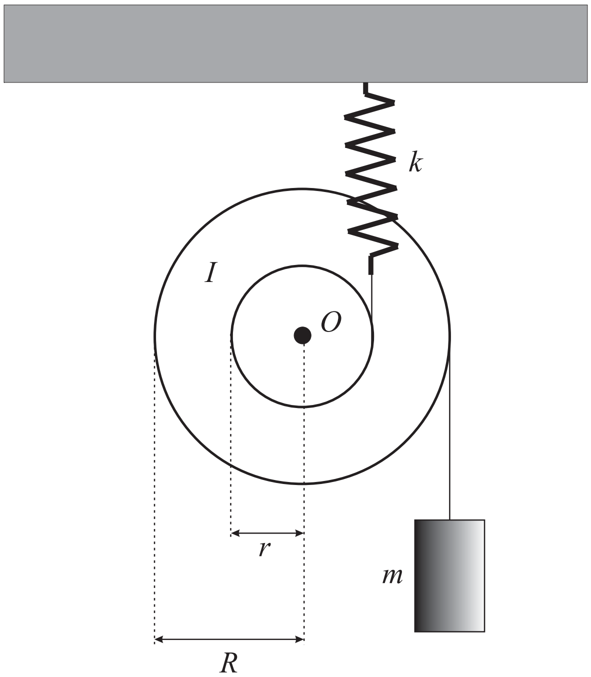
Mekanik II, 5C1140, M, T, CL 2005 10 17, kl 14.00-18.00

Lösningar till Problemtentamen

Uppgift 1: Två cylindrar med radierna r respektive R sitter ihop som en stel kropp. Den kan rotera fritt kring en fix horisontell axel O. Kroppens tröghetsmoment med avseende på O är I. En tråd virad runt den mindre cylindern är i förbindelse med ett tak via en vertikal fjäder med styvhet k. En annan tråd lindad runt den större cylindern bär upp en vikt med massa m. Bestäm vinkelfrekvensen för systemets svängningar kring jämviktsläget.



Figur 1: Systemet i Uppgift 1

Lösning 1: Om cylindern vrids vinkeln θ medurs dras fjädern ut sträckan $\Delta x = r\theta$ och vikten åker ned sträckan $x = R\theta$. Kalla trådspänningen för S. Då ger friläggning:

$$I\ddot{\theta} = r(-kr\theta) + RS, \quad (1)$$
$$mR\ddot{\theta} = mg - S, \quad (2)$$

d.v.s. en momentekvation för den roterade kroppen och en kraftekvation för vikten. $\theta = 0$ antas svara mot ospänd fjäder. Insättning av S från (2) i (1) ger

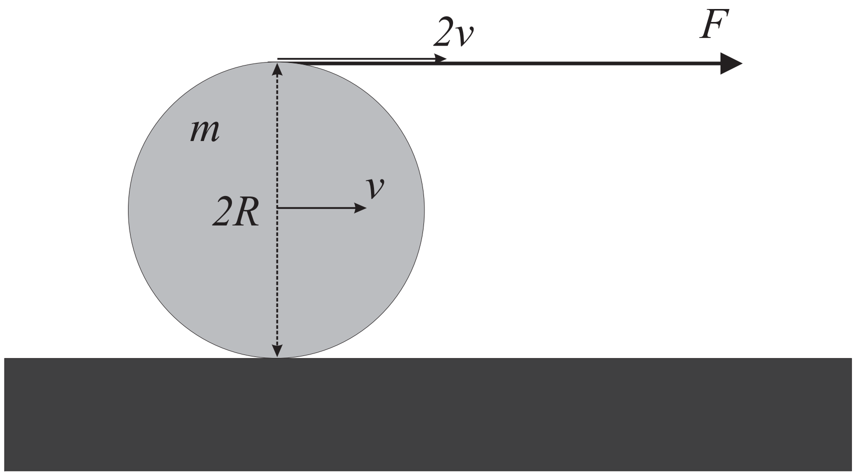
$$(I + mR^2)\ddot{\theta} = -kr^2\theta + Rmg.$$

Den konstanta termen kan fås bort genom att man definierar en ny vinkel $\phi = \theta - Rmg/kr^2$ som är noll vid jämviktsläget. I termer av denna fås svängningsekationen

$$\ddot{\phi} = -\omega^2\phi$$

där **Svar:** $\omega = \sqrt{kr^2/(I + mR^2)}$ är den sökta vinkelfrekvensen.

Uppgift 2: På en homogen cylinder med massan m är en tråd upplindad. Cylindern, vars radie är R, läggs på ett horisontellt plant strävt underlag. Tråden dras ut horisontellt på cylinderns översida. Då cylindern är i vila appliceras en konstant kraft F i horisontell riktning, vinkelrätt mot cylinderaxeln. Beräkna masscentrums fart v då cylindern rullat sträckan s.



Figur 2: Systemet i Uppgift 2

Lösning 2: Problemet löses lättast med lagen om kinetiska energin $U = T - T_0$. Den statiska friktionskraften uträttar inget arbete, ej heller de vertikala krafterna. Endast kraften F i tråden arbetar. När cylindern rullat sträckan s har tråden rullats ut sträckan $2s$ eftersom cylinderns överdel har dubbla farten mot masscentrum. Kraften har alltså verkat sträckan $2s$ så dess arbete är $U = 2sF$. Alltså ger lagen i fråga att

$$2sF = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{v}{R}\right)^2 - 0,$$

då ju $T_0 = 0$ i detta fall. Här har lagen om kinetiska energins två delar använts samt rullningsvillkoret $v = R\dot{\theta}$ och att tröghetsmomentet för en cylinder är $I = \frac{mR^2}{2}$.

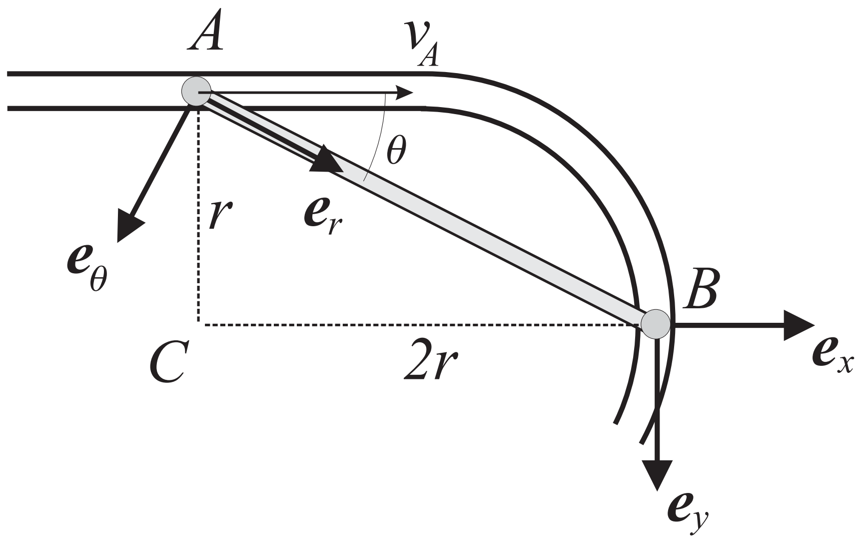
Man får då att $2sF = (3/4)mv^2$. Löser man ut v får man

Svar:

$$v = \sqrt{\frac{8sF}{3m}},$$

för masscentrums fart efter sträckan s.

Uppgift 3: En stång AB med längd $\sqrt{5}r$ rör sig så att båda ändarna följer ett givet spår. Änden A rör sig med konstant fart v_A i en del av spåret som är rakt. Änden B rör sig i en cirkelformad del av spåret. Cirkeln har radien r. I ett givet ögonblick har änden B rört sig 90 grader ($\pi/2$ radianer) i cirkelbiten av spåret, se figur. Vad har stången då för vinkelhastighet och vad har den för vinkelacceleration?



Figur 3: Några beteckningar för Uppgift 3

Lösning 3: Stångens momentancentum ligger i C och man ser genast att,

$$\begin{aligned} r\omega &= v_A, && (3)\\ 2r\omega &= v_B = 2v_A, && (4)\\ \omega = \dot{\theta} &= v_A/r. && (5) \end{aligned}$$

Ur geometrin följer att

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{BC}{BA} = \frac{2}{\sqrt{5}}, && (6)\\ \sin\theta &= \frac{AC}{BA} = \frac{1}{\sqrt{5}}. && (7) \end{aligned}$$

Vi använder nu sambandsformeln för accelerationer

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + r_{AB}\alpha\,\boldsymbol{e}_\theta - r_{AB}\omega^2\,\boldsymbol{e}_r.$$

Det är givet att stångens längd är $r_{AB} = \sqrt{5}r$ och att änden A har konstant fart, d.v.s. $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{0}$. Eftersom B rör sig på en cirkelbana kan vi använda de naturliga komponeneterna av Bs acceleration och erhålla vektorekvationen,

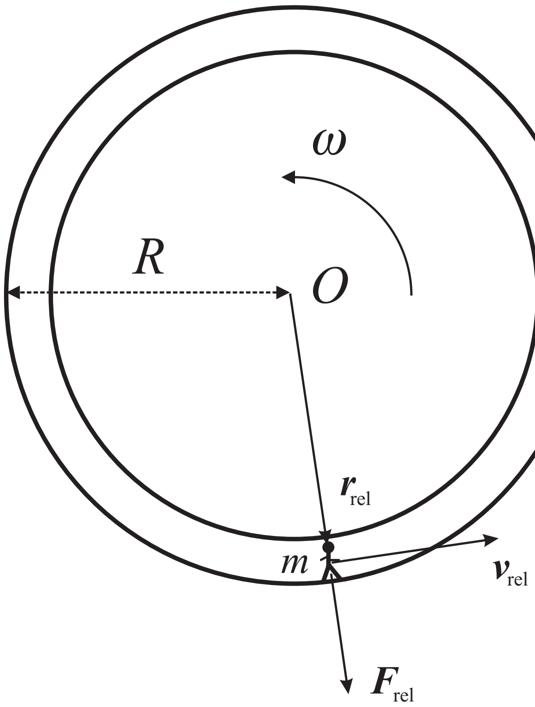
$$-\frac{v_B^2}{r}\boldsymbol{e}_x + a_t\boldsymbol{e}_y = \sqrt{5}r(\alpha\,\boldsymbol{e}_\theta - \omega^2\,\boldsymbol{e}_r) \tag{8}$$

Komponenterna av denna längs $\boldsymbol{e}_\theta$ och $\boldsymbol{e}_r$ ger

$$\begin{aligned} -\frac{v_B^2}{r}(-\sin\theta) + a_t\cos\theta &= \sqrt{5}r\alpha, && (9)\\ -\frac{v_B^2}{r}\cos\theta + a_t\sin\theta &= \sqrt{5}r(-\omega^2). && (10) \end{aligned}$$

Med $\sin\theta\cdot(9) - \cos\theta\cdot(10)$ elimineras a_t och man får en ekvation för vinkelaccelerationen α. Med lite algebra och insättning av ovan erhållna resultat fås till sist
Svar: $\omega = v_A/r$ och $\alpha = 2v_A^2/r^2$.

Uppgift 4: En rymdstation består av ett stort cirkulärt rör med ytterradie R. Om rymdstationen roterar med lämplig konstant vinkelhastighet ω påverkas en person i vila relativt stationen, vid ytterradien, av en systempunktskraft (centrifugalkraft) som är lika stor som tyngdkraften vid jordytan (tyngdaccelerationen vid jordytan är g). För vilket ω inträffar detta? Om personen har relativ hastighet längs röret tillkommer en Corioliskraft. Med vilken relativ fart och i vilken riktning måste personen röra sig för att Corioliskraften skall dubblera tyngden, d.v.s. bli lika stor och åt samma håll som centrifugalkraften?



Figur 4: Några beteckningar för Uppgift 4

Lösning 4: Centrifugalkraften är $\boldsymbol{F}_{\text{sp}} = m\omega^2 r\boldsymbol{e}_r$. I denna uppgift är $r\boldsymbol{e}_r = R\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}_{\text{rel}}$ så om centrifugalkraftens belopp skall vara lika med mg vid $r = R$ fås:

$$m\omega^2 R = mg.$$

Alltså måste den rätta vinkelhastigheten ges av

$$\textbf{Svar: } \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Corioliskraften ges av $\boldsymbol{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\text{rel}}$. Här gäller $\boldsymbol{F}_{\text{Cor}} = -2m\omega\boldsymbol{e}_z \times v_{\text{rel}}\boldsymbol{e}_\theta = 2m\omega v_{\text{rel}}\boldsymbol{e}_r$. Corioliskraften blir således lika stor som centrifugalkraften (och tyngdkraften) när

$$2m\sqrt{g/R}\,v_{\text{rel}} = mg.$$

Detta ger

$$\textbf{Svar: } \boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\sqrt{Rg}\,\boldsymbol{e}_\theta.$$

Riktningen är alltså åt samma håll som röret roterar.

Teoritentamen

Uppgift 5: Sambandsformeln för hastigheter i en stel kropp är $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}$. Antag plan rörelse. Visa att om $|\boldsymbol{\omega}| > 0$ så finns en punkt i kroppen (eller stelt förenad med kroppen) som har hastighet noll.

Svar 5: Detta visas på sidan 43, avsnitt 2.5 i Christer Nyberg, Mekanik fortsättningskurs.

Uppgift 6: Formulera och bevisa satsen om kinetiska energins två delar för en stel kropp med plan rörelse.

Svar 6: Detta visas på sidan 97, avsnitt 4.3.1 i Christer Nyberg, Mekanik fortsättningskurs.

Uppgift 7: Härled tröghetsmomentet för en smal homogen stav, med massa m och längd a, för en axel som är vinkelrät mot staven och går genom ena ändpunkten.

Svar 7: Detta visas överst på sidan 74, avsnitt 3.3 i Christer Nyberg, Mekanik fortsättningskurs.

Uppgift 8: Då Jorden roterar med konstant vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ blir en av de fiktiva krafter som uppträder systempunktskraften (centrifugalkraften) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{sp}} = m\omega^2 r \boldsymbol{e}_r$. Beskriv kvalitativt vad den har för inverkan!

Svar 8: Detta diskuteras på sidan 133, avsnitt A.5 i Christer Nyberg, Mekanik fortsättningskurs.

Problem- och teoritentamen är olika tentamina som vid godkänt ger 2 respektive 1 kurspoäng. Varje uppgift ger högst 3 (tentamens)poäng. På vardera delen kan man högst få 12 poäng och för godkänt fordras minst 4 poäng. Har du klarat kontrollskrivningar är teoridelen redan godkänd. För att kursen skall vara klar i sin helhet måste du också ha fått godkänt på inlämningsuppgifter som är värda 1 kurspoäng.

Tillåtna hjälpmedel: skriv- och ritdon inklusive suddgummi.

HE/CN 05 10 17