KTH Mekanik

SG1102, Mekanik mindre kurs 6p, för K1 och BIO1, läsåret 11/12

KTH Mekanik
Fritz Bark

Teorifrågor, reviderade

Fyra av nedanstående trettiotvå frågor utgör teoridelen av tentamen. Var och en av de två kontrollskrivningarna består av sex frågor från de nedanstående.

1. Definiera i en figur summan av två vektorer **a** och **b**. Visa i samma figur att **a** + **b** = **b** + **a**.

2. En vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ är given i ett Cartesiskt koordinatsystem. Uttryck vektorns belopp $|\mathbf{a}|$ i dess Cartesiska komponenter. Ange uttrycket för en enhetsvektor $\mathbf{e}_a$, som har samma riktning som vektorn **a**.

3. Två vektorer **a** och **b** samt vinkeln α mellan dessa är givna. Ange definitionen av skalärprodukten $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ och vektorprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Rita figurer.

4. Två vektorer $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ och $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ är givna. Uttryck produkterna $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ i de givna vektorernas Cartesiska komponenter. Vektorprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ får skrivas som en determinant.

5. Ange den geometriska tolkningen av vektorprodukten $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ och trippelprodukten $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Rita figurer.

6. En partikel rör sig i ett Cartesiskt koordinatsystem (x, y, z) längs en kurva $\mathbf{r}(t)$ där t betecknar tid. Definiera partikelns hastighet **v** och dess acceleration **a**.

7. En 3D kurva är i ett Cartesiskt koordinatsystem given på följande form $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, där **r** är ortsvektorn och s är kurvans båglängd, räknad från en given fix punkt på kurvan. Visa, gärna med en figur, att vektorn $\mathbf{e}_t(s) = \mathbf{r}'(s)$, där ' betecknar derivata med avseende på s, har beloppet 1 och är riktad längs kurvans tangent. Visa dessutom att $\mathbf{e}_t'(s) \perp \mathbf{e}_t(s)$ och, för det fall kurvan ligger i ett plan, att vektorn $\mathbf{e}_t'(s)$ är riktad mot kurvans konkava sida.

8. De storheter, som förekommer i denna uppgift, definieras i föregående uppgift. Betrakta en 2D kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Approximera kurvan lokalt med en cirkel, vars radie är ρ, och visa med hjälp av en figur att $|\mathbf{e}_t'(s)| = \rho^{-1}$ och således att man kan skriva $\mathbf{e}_t'(s) = \mathbf{e}_n(s)/\rho$ där $\mathbf{e}_n(s)$ är en enhetsvektor, riktad mot kurvans konkava sida.

9. En partikel rör sig längs en kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ i 2D. Partikelns läge på kurvan vid tiden t ges av funktionen $s = s(t)$. Visa, med användning av de formler, som härletts i frågorna 7 och 8, att partikels hastighet **v** och acceleration **a** ges av uttrycken $\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_t$ respektive $\mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_t + \dot{s}^2\mathbf{e}_n / \rho$.

10. En bil rör sig i en plan cirkelrörelse i ett Cartesiskt koordinatsystem (x, y, z). Cirkelns medelpunkt ligger i origo och dess radie är b. Bilens läge på cirkeln ges av vinkeln $\theta(t)$, där t betecknar tid, mellan radien från origo till bilen och x-axeln. Beräkna hastigheten $\mathbf{v}$ och accelerationen $\mathbf{a}$ för bilens rörelse som funktion av $\theta(t)$ och dess derivator. Beräkna även beloppen av vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{v}$.

11. Betrakta ett 2D Cartesiskt koordinatsystem (x, y) med enhetsvektorerna $\mathbf{e}_\mathbf{x}$ och $\mathbf{e}_\mathbf{y}$ och ett polärt koordinatsystem (r, θ) med enhetsvektorerna $\mathbf{e}_\mathbf{r}$ och $\mathbf{e}_\theta$. Härled sambanden $\mathbf{e}_\mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{e}_\mathbf{x} + \sin\theta\mathbf{e}_\mathbf{y}$ och $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{e}_\mathbf{y}$. Ange uttrycket för ortsvektorn $\mathbf{r}$ i polära koordinater. Antag vidare att de polära koordinaterna för en partikels läge är funktioner av tiden t och härled uttrycken $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ och $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_\mathbf{r}$.

12. Härled uttrycken för hastighet och acceleration i cylinderkoordinater för rörelse i 3D, dvs. visa att $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_\mathbf{r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$ och $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\mathbf{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$. Du får här fritt använda de formler, som Du skulle härleda i uppgift 11 även om Du inte gjort uppgift 11.

13. Ange innebörden av Newtons andra och tredje lagar. Ge gärna något eller några exempel.

14. Betrakta en s.k. matematisk pendel, dvs. en partikel med massan m är fäst i ena änden av ett snöre vars andra ände hålls vid en fix punkt. Snörets längd är l. Om snöret är sträckt kommer partikeln att röra sig under inverkan av tyngdkraften mg och snörspänningen S. Ställ upp rörelseekvationerna i polära koordinater.

15. Ett backkröns kontur approximeras med en halvcirkelbåge. Från vila på krönets topp börjar en vagn rulla utför krönet under tyngdkraftens inverkan. Ställ upp rörelseekvationerna i polära koordinater för vagnens rörelse. Multiplicera en av dessa ekvationer med $\dot{\theta}$ och integrera den så erhållna ekvationen med avseende på tiden t för att beräkna $\dot{\theta}$ som funktion av θ. Formulera ett villkor för att vagnen skall lätta från vägen utför krönet och beräkna den vinkel för vilken detta sker.

16. En rak stång roterar i ett horisontalplan med vinkelhastigheten ω. En hylsa på stången kan utan friktion röra sig längs stången. Ställ upp rörelseekvationerna för hylsan i ett planpolärt koordinatsystem. Beräkna hylsans radiella rörelse för det fall då begynnelsevillkoret (för tiden $t = 0$) är $r(0) = r_0$ och $\dot{r}(0) = 0$. Beräkna slutligen den horisontella normalkraften från stången på hylsan.

17. En partikel, vars massa är m, rör sig i ett kraftfält $\mathbf{F}$, som i det allmänna fallet beror av både tiden t och partikelns läge $\mathbf{r}$. Definiera det arbete U_{1-2}, som kraftfältet utför på partikeln, om denna förflyttas mellan punkterna $\mathbf{r}_1$ och $\mathbf{r}_2$. Beräkna U_{1-2} om $\mathbf{F} = mg(0, 0, -1)$ där g är tyngdaccelerationen. Beräkna dessutom U_{1-2} för plan rörelse om, i planpolära koordinater, $\mathbf{F} = -k(r - l_0)\mathbf{e}_r$ där k och l_0 är konstanter. Vilken mekanisk anordning beskrivs av det sistnämnda kraftfältet?

18. Härled lagen om kinetiska energin för en partikels rörelse $\mathbf{r}(t)$ under inverkan av en kraft **F**, dvs. $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{2}$

19. Ange förutsättningen för att man, för ett givet kraftfält **F**, kan definiera kraftfältets potentiella energi V(**r**) och ange definitionen av V. Använd lagen om kinetiska energin, se uppgift 18, för att visa att summan av kinetisk och potentiell energi är konstant. Varför kan man välja en godtycklig referensnivå för den potentiella energin V? Ange den potentiella energin för tyngdkraftfältet och för en linjär fjäder.

20. Den allmänna gravitationskraften mellan två massor m och M ges av formeln
$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r$$
där G är den allmänna gravitationskonstanten och r är avståndet mellan massorna. Beräkna detta kraftfälts potentiella energi.

21. I ett 3D Cartesiskt koordinatsystem angriper en kraft **F** i punkten **r**. Definiera kraftens moment $\mathbf{M}_O$ med avseende på koordinatsystemets origo. Beräkna $\mathbf{M}_O$ för fallet $\mathbf{r} = (x, 0, z)$ och $\mathbf{F} = (F_x, 0, F_z)$. Kring vilken axel vrider kraften F i detta fall? Vad innebär riktningen av vektorn $\mathbf{M}_O$ i detta exempel?

22. En partikel med massan m rör sig längs banan $\mathbf{r}(t)$ med hastigheten $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$. Definiera partikelns rörelsemängdsmoment $\mathbf{H}_O$ med avseende på origo. Visa dessutom att för fallet plan rörelse i x-y-planet gäller att $\mathbf{H}_O = mr^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z$ där r och θ är polära koordinater. Visa slutligen att, i ett allmänt fall i 3D, $\dot{\mathbf{H}}_O = \mathbf{M}_O$.

23. Ringa in de rätta alternativen i följande påståenden. Begreppet finit används här som ett mellanting mellan två angivna ytterligheter. För ett stötförlopp mellan två fasta kroppar gäller att

    i. kontakttiden är kort finit lång
    ii. lägesändringar är små finita stora
    iii. ändringar i hastighet är små finita stora
    iv. ändringar i acceleration är små finita stora
    v. kontaktkrafter är små finita stora
    vi. yttre krafter är försumbara ej försumbara

24. Visa att två kroppars sammanlagda rörelsemängd är oförändrad vid en rak stöt, dvs. båda kropparnas rörelse före och efter stöten äger rum längs en och samma axel.

25. Definiera begreppen centralrörelse och sektorhastighet. Visa att bankurvan vid centralrörelse är plan.

26. En planet med massan m rör sig kring en sol med massan M. Rörelsens dubbla sektorhastighet är h och G är den allmänna gravitationskonstanten. I ett polärt koordinatsystem finner man följande uttryck för planetens bankurva

$$r = \frac{h^2}{GM(1+e\cos\theta)}$$

där e är en dimensionslös parameter. Vad kallas parametern e och vilka kurvor beskriver formeln för olika värden på e?

27. En amatörastronom har två gånger beräknat omloppstiden τ för en planets rörelse kring en sol men, p.g.a. ett räknefel (sådant händer oss alla), funnit två olika svar

$$\tau = 2\pi \frac{a^3}{\sqrt{GM}} \quad \text{och} \quad \tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Använd dimensionsanalys för att bestämma vilken av dessa formler som är korrekt. Ledning: För den allmänna gravitationskonstanten G gäller att $G = gR^2M^{-1}$ där g är jordens tyngdacceleration, R är jordradien och M jordens massa.

28. Ställ upp rörelseekvationerna för en matematisk pendel vars massa är m och längd är l. Förenkla ekvationerna under antagandet att pendelns utslagsvinkel θ är liten. Ange formeln för rörelsens vinkelfrekvens ω och period T.

29. Ställ upp rörelseekvationen för en kropp, vars massa är m, som rör sig längs x-axeln under inverkan av en fjäderkraft $-kx$, dvs. fjädern är ospänd då kroppen befinner sig i origo. Ange för rörelsens vinkelfrekvens ω och period T.

30. Beskriv, i kvalitativa termer, begreppen fri och påtvingad svängning samt begreppet resonans.

31. Lösningen till differentialekvationen

$$\ddot{x} + 2\varsigma\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

beskriver en fri dämpad svängningsrörelse. ω_n är vinkelfrekvensen för den odämpade svängningen ($\varsigma = 0$) och den dimensionslösa parametern ς anger dämpmekanismens styrka. Beskriv i korthet och illustrera gärna med figurer svängningens egenskaper för fallen $\varsigma < 1, \varsigma = 1$ och $\varsigma > 1$. Vad menas med s.k. kritisk dämpning? Ange för fallet $\varsigma < 1$ hur den dämpade svängningens vinkelfrekvens beror av ς.

32. Lösningen till differentialekvationen

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = a\omega_n^2 \sin\omega t$$

beskriver en påtvingad svängning. Härled en partikulärlösning för fallet $\omega \neq \omega_n$. Varför är lösningen orealistisk för $\omega = \omega_n$? Beskriv *kvalitativt* hur denna orealistiska partikulärlösning ändras om man lägger till en svagt dämpande linjär mekanism i det svängande systemet, vilket innebär att ekvationen modifieras till

$$\ddot{x} + 2\varsigma\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = a\omega_n^2 \sin\omega t$$

där $\varsigma \ll 1$.