KTH Mekanik
Fritz Bark

Tentamen i SG1102, Mekanik mindre kurs, 2008-10-25

Inga hjälpmedel är tillåtna förutom penna och kautschuk. Rita tydliga figurer och definiera alla införda storheter. Om Du fastnar på en uppgift, gå vidare till nästa. Om Du inte lyckas lösa en uppgift ända fram till svaret, lämna ändå in Din uppställning av problemet. Ett korrekt uppställt problem ger poäng. *Lycka till!*

Problemdel

1. En liten kub, vars massa är m, kan glida på ett lutande plan. Friktionskoefficienten mellan plan och kub är μ och planet lutar en vinkel α mot ett horisontalplan, se figur 1. Tyngdaccelerationen är g. Kuben ges initialt en hastighet v_0 uppåt på planet. Beräkna hur långt kuben glider på planet innan den vänder.

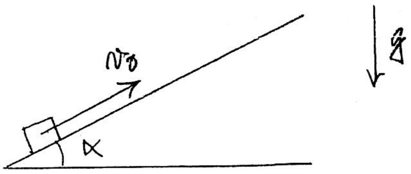
2. En s.k. matematisk pendel består av en liten kropp, som är fäst i ett snöre. Kroppens massa är m och snörets längd är l. Snörets fria ände hålls i en fix punkt och massan m rör sig i en vertikal cirkelbåge under inverkan av tyngdkraften mg och snörspänningen S, se figur 2. Bestäm pendelns maximala utslagsvinkel $\theta = \theta_0$ så att snörspänningen i cirkelbågens nedersta del $(\theta = 0)$ blir $3mg$.

3. Figur 2 visar en $2D$ modell av en s.k. slangbella. Ett lätt gummiband, vars fjäderkonstant är k och naturliga längd $2a$, är fäst mellan två punkter. Avståndet mellan dessa punkter är $2a$. I bandets mittpunkt hålls en partikel med massan m. Innan skott sträcks bandet så att partikeln och bandets mittpunkt dras ut en sträcka ca, där c är en dimensionslös konstant, se figur 3. Bestäm c så att partikeln lämnar slangbellan med en hastighet $4a\sqrt{k/m}$.

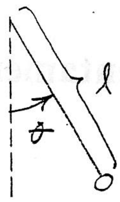
4. Betrakta ett glatt horisontellt halvrör, som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω_0 kring en vertikal axel. I röret ligger en partikel, vars massa är m, och en lätt fjäder, vars fjäderkonstant är k och naturliga längd l_0, se figur 3. Fjäderns ena ände är fäst vid rotationsaxeln och den andra vid partikeln så att partikelns rörelse i röret påverkas av fjäderkraften. Deluppgift I: Bestäm det värde på k som ger egenfrekvensen $2\omega_0$ för partikelns svängning i röret (2p). Deluppgift II: För det i föregående uppgift beräknade värdet på k, bestäm rörelsen för begynnelsevillkoret $r(0) = 5l_0/4, \dot{r}(0) = l_0\omega_0/2$ (1p).

V.g. vänd

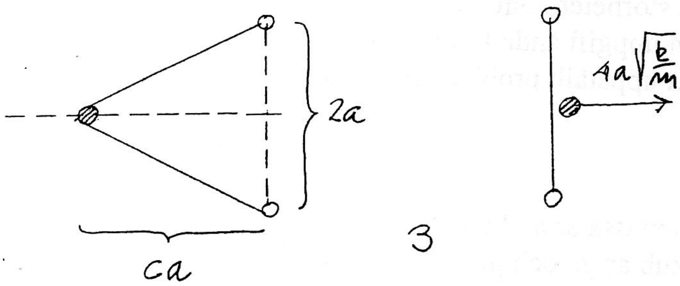
Figurer



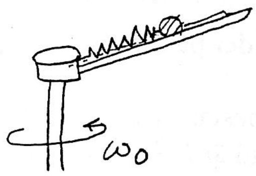
1



2



3



4

Teoridel

5. Betrakta ett 2D Cartesiskt koordinatsystem (x, y) med enhetsvektorerna $\mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_y$ och ett polärt koordinatsystem (r, θ) med enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$. Härled sambanden $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y$. Ange uttrycket för ortsvektorn $\mathbf{r}$ i polära koordinater. Antag vidare att de polära koordinaterna för en partikels läge är funktioner av tiden t och härled uttrycken $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ och $\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$.

6. Härled lagen om kinetiska energin, dvs. $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

7. Under vilken förutsättning kan man för ett kraftfält $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definiera detta kraftfälts potentiella energi $V(\mathbf{r})$? Visa för en partikel, som rör sig i ett sådant kraftfält, att $T + V = E = konst.$ (energiekvationen).

8. Definiera begreppen centralrörelse och sektorhastighet. Visa att bankurvan vid centralrörelse är plan.

Lycka till!
Fritz Bark