KTH Mekanik

KTH Mekanik
Fritz Bark

Tentamen i SG1102, Mekanik mindre kurs, 2007-10-27

Inga hjälpmedel är tillåtna förutom penna och kautschuk. Rita tydliga figurer och definiera alla införda storheter. Om Du fastnar på en uppgift, gå vidare till nästa. Om Du inte lyckas lösa en uppgift ända fram till svaret, lämna ändå in Din uppställning av problemet. Ett korrekt uppställt problem ger poäng. *Lycka till!*

Problemdel

1. En s.k. matematisk pendel består av en liten kropp, som är fäst i ett snöre. Kroppens massa är *m* och snörets längd är *l*. Snörets fria ände hålls i en fix punkt och massan *m* rör sig i en vertikal cirkelbåge under inverkan av tyngdkraften och snörspänningen S, se figur 1. Bestäm massans horisontella hastighet v_0 i cirkelbågens nedersta del $(\theta = 0)$ så att snörspänningen i läget $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ blir mg. För vilken vinkel θ, uttryckt i funktionen *arccos(*θ*)*, slaknar snöret?

2. En partikel, vars massa är *m*, rör sig utan friktion med hastigheten v_0 på ett horisontellt bord, se figur 2. Partikeln rör sig mot vinkelrät mot ett rakt spänt gummiband, vars längd är $2a$, och träffar bandet i dettas mittpunkt. Gummibandets naturliga längd är a. Beräkna bandets fjäderkonstant *k* om partikelns hastighet reducerats till noll då partikeln rört sig en sträcka $\dfrac{3a}{4}$ efter att ha träffat bandet.

3. Betrakta ett system som utför en påtvingad svängning, se figur 3. Systemet antages ha svängt under så lång tid att de fria svängningarna, dvs. svängningar med vinkelfrekvensen $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, har dämpats ut. Inför substitutionen $F_0 = ma\omega_n^2$ där konstanten *a*, som har dimensionen längd, definierar amplituden av den drivande kraften, dvs. F_0. Bestäm vinkelfrekvensen ω hos den drivande oscillerande kraften så att den påtvingade svängningens amplitud blir $4a$.

4. En partikel *A* med massan m_0 kan röra sig friktionsfritt på ytan av ett horisontellt bord, se fig. 4. Partikeln *A* är dessutom fäst i en tråd, som löper genom ett litet hål i bordet, och roterar kring hålet med vinkelfrekvensen ω_0. I trådens andra ände sitter en partikel kallad *B*, vars massa $m = 2m_0$. Bestäm vinkelfrekvensen ω_0 så att systemet är stationärt, dvs. partikeln A rör sig i en cirkelbana med den i figuren givna radien r_0. Efter hand börjar partikel *B* i att falla sönder så att dess massa sucessivt minskar från $2m_0$ till m_0. I det nya jämviktsläge, som efter en tid inställer sig, har cirkelradien r_0 ändrats till r_1 och vinkelhastigheten ω_0 till ω_1. Beräkna ω_1 och r_1.

Teoridel

5. I ett polärt koordinatsystem, härled sambanden mellan enhetsvektorerna $\mathbf{e}_r$ och $\mathbf{e}_\theta$ och deras tidsderivator. Härled därefter uttrycken för hastighet och acceleration i detta koordinatsystem.

6. Härled lagen om kinetiska energin, dvs. $\dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} = \displaystyle\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

7. Under vilken förutsättning kan man för ett kraftfält $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ definiera detta kraftfälts potentiella energi $V(\mathbf{r})$? Visa för en partikel, som rör sig i ett sådant kraftfält, att $T + V = E = konst.$ (energiekvationen).

8. Två partiklar rör sig mot varandra längs en rät linje. Visa att summan av partiklarnas rörelsemängder är densamma för och efter det att partiklarna stött ihop.