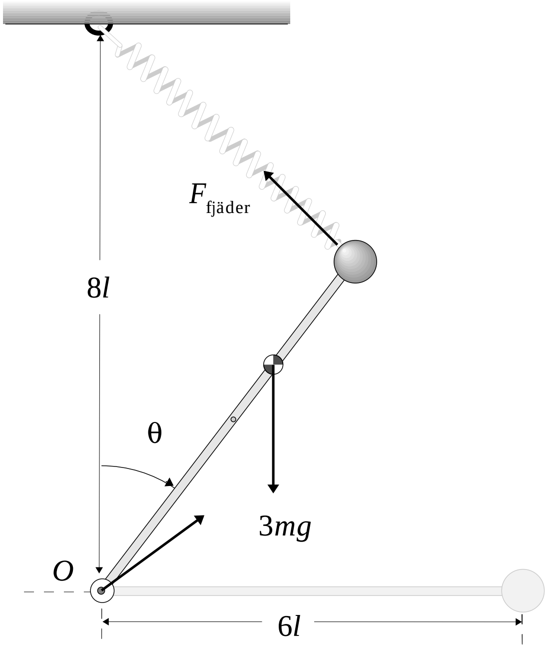


Det handlar här om en stel kropps hastighetstillstånd i två bestämda lägen. I ena läget är vinkelhastigheten ω, i det andra läget är vinkelhastigheten 0. Tiden är inte intressant i denna problemställning. Det betyder att man bör sikta in sig på en lösningsmetod som utnyttjar ett arbete-energisamband.

Frilägg kroppen! Den påverkas av tyngdkraften $3mg$, fjäderkraften $F_{\text{fjäder}}$ samt reaktionskraften från axeln. Den sistnämnda gör inget arbete. Tyngdkraften och fjäderkraften är konservativa, vilket betyder att den mekaniska energin bevaras. Vi ställer upp lagen om den mekaniska energins bevarande:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{1}$$

Fjäderns längd för läget $\theta = \pi/2$ är $10l$ och fås med Pythagoras sats. Förlängningen är alltså $9l$. I det vertikala läget är förlängningen l.

Kroppens tröghetsmoment med avseende på axeln är

$$I_O = I_O^{\text{stång}} + I_O^{\text{kula}} = \frac{(2m)\cdot(6l)^2}{3} + m(6l)^2 = 60ml^2 \tag{2}$$

Avståndet mellan axeln och kroppens masscentrum är enligt masscentrum-definitionen

$$\frac{2m\cdot 3l + m\cdot 6l}{2m+m} = 4l \tag{3}$$

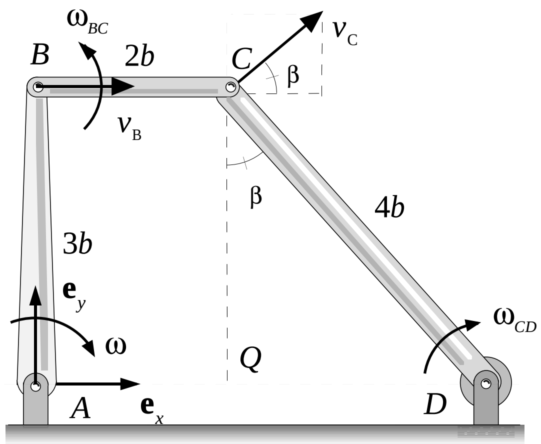
Insättning i ekv (1) ger

$$0 + 0 + \frac{1}{2}k(9l)^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + 3mg\cdot 4l + \frac{1}{2}kl^2 \tag{4}$$

Insättning av uttrycket för I_O ger då

$$80kl^2 = 60ml^2\omega^2 + 24mgl \tag{5}$$

$$\underline{\underline{k = \frac{3m}{4}\omega^2 + \frac{3mg}{10l}}}$$



Antag att vinkelhastigheterna för BC och CD är ω_{BC} och ω_{CD} med riktningar enligt figur. Punkterna B och C rör sig i cirkelbanor kring A respektive D. Länkarmarna AB och CD har alltså ren rotationshastighet. Avståndet $QD, \sqrt{7}b$, fås med Pythagoras sats.

$$\mathbf{v}_B = 3b\omega\,\mathbf{e}_x \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_C = b\omega_{CD}\left(3\mathbf{e}_x + \sqrt{7}\mathbf{e}_y\right) \tag{2}$$

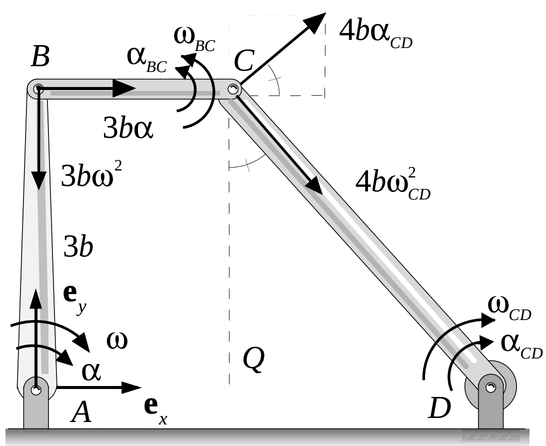
Sambandsformeln för stången BC

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC} \tag{3}$$

ger i komponentform

$$\begin{aligned} \rightarrow: &\quad 3b\omega_{CD} = 3b\omega + 0 \\ \uparrow: &\quad \sqrt{7}b\omega_{CD} = 0 + 2b\omega_{BC} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{CD} = \omega \\ \omega_{BC} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\omega \end{cases} \tag{5}$$



Antag att vinkelaccelerationerna för BC och CD är α_{BC} och α_{CD} med riktningar enligt figur.

$$\mathbf{a}_B = 3b\alpha\,\mathbf{e}_x - 3b\omega^2\mathbf{e}_y \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C = &\, b\left(\sqrt{7}\omega_{CD}{}^2 + 3\alpha_{CD}\right)\mathbf{e}_x \\ &+ b\left(\sqrt{7}\alpha_{CD} - 3\omega_{CD}{}^2\right)\mathbf{e}_y \end{aligned} \tag{7}$$

Sambandsformeln stången BC

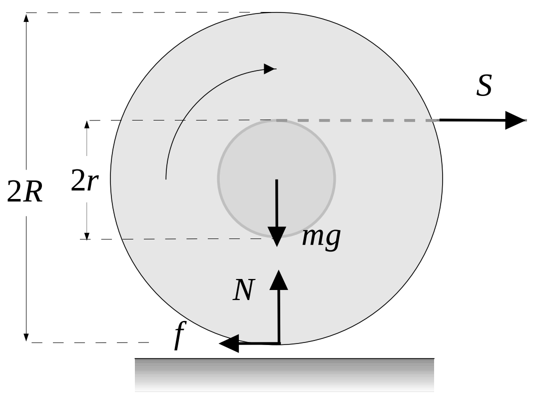
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC} + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{BC}\right) \tag{8}$$

ger i komponentform:

$$\begin{aligned} \rightarrow: &\quad \sqrt{7}b\omega_{CD}{}^2 + 3b\alpha_{CD} = 3b\alpha + 0 - 2b\omega_{BC}{}^2 \\ \uparrow: &\quad -3b\omega_{CD}{}^2 + \sqrt{7}b\alpha_{CD} = -3b\omega^2 + 2b\alpha_{BC} + 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Den första av dessa komponentekvationer räcker för att bestämma α_{CD}. Insättning av (5) ger

$$\underline{\underline{\alpha_{CD} = \alpha - \left(\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{7}}{3}\right)\omega^2}}$$



Frilägg trådrullen! Den påverkas av trådkraften S, tyngdkraften mg och kontaktkraften, som har komponenterna f och N enligt figuren. Vi antar rullning åt höger med vinkelhastigheten $\dot{\theta}$.

Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ ger i komponentform

$$\rightarrow: \quad S - f = m\ddot{x}_G \tag{1}$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0 \tag{2}$$

$$G: \quad S \cdot r + f \cdot R = \frac{mR^2}{2}\ddot{\theta} \tag{3}$$

Det kinematiska sambandet är $\ddot{x}_G = R\ddot{\theta}$ (4)

Eftersom friktionsvillkoret ska undersökas bestämmer vi först friktionskraften och normalkraften. Sätt först in sambandet (4) i ekv (1)!

$$S - f = mR\ddot{\theta} \tag{1'}$$

Eliminera vinkelaccelerationen genom att sätta in detta i ekv (3)!

$$S \cdot r + f \cdot R = \frac{R}{2}(S - f) \tag{3'}$$

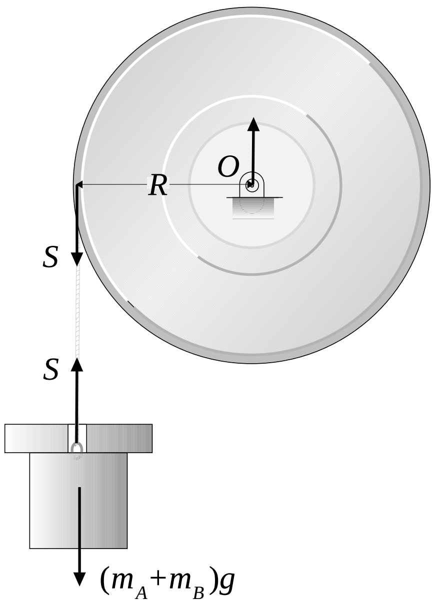
$$\Rightarrow \qquad \frac{3R}{2} f = S \cdot \left(\frac{R}{2} - r\right) \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{R - 2r}{3R} S$$

Normalkraften är enligt ekv (2) $N = mg$

Friktionsvillkoret $\mu > \dfrac{f}{N}$ blir då $\mu > \dfrac{R - 2r}{3R} \cdot \dfrac{S}{mg}$

Om dragkraften $S = mg$ och $R = 3r$ fås

$$\underline{\underline{\mu > \frac{1}{9}}}$$



Vi frilägger först hjulet. Momentekvationen med avseende på rotationsaxeln för hjulet

$$M_z = \dot{H}_z \qquad (1)$$

ger

$$\circlearrowleft O: \quad R \cdot S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\right) \quad \Rightarrow \qquad (2)$$

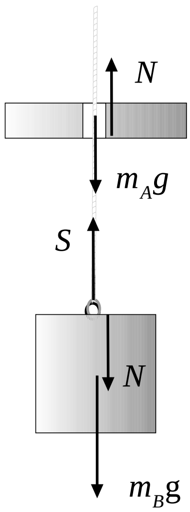
$$S = \frac{mR}{2}\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Kraftekvationen för tyngd + skiva:

$$\downarrow: \quad (m_A + m_B)g - S = (m_A + m_B)\ddot{x} \qquad (4)$$

Här är enligt geometrin (rullning)

$$\ddot{x} = R\ddot{\theta} \qquad (5)$$



Nu frilägger vi skivan och skriver upp kraftekvationen för den:

$$\downarrow: \quad m_A g - N = m_A \ddot{x} \qquad (6)$$

Eliminera kraften S genom att sätta in ekv (3) i ekv (4)!

$$(m_A + m_B)g - \frac{mR}{2}\ddot{\theta} = (m_A + m_B)\ddot{x} \qquad (7)$$

Ekv (5) ger då

$$(m_A + m_B)g = \left(\frac{m}{2} + m_A + m_B\right)\ddot{x} \qquad (8)$$

Nu ger ekv (6) och ekv (8) normalkraften N:

$$m_A g - N = m_A \frac{(m_A + m_B)g}{\frac{m}{2} + m_A + m_B} \qquad \Rightarrow \qquad N = m_A g\left(1 - \frac{m_A + m_B}{\frac{m}{2} + m_A + m_B}\right)$$

$$\underline{\underline{N = \frac{m\, m_A g}{m + 2m_A + 2m_B}}}$$