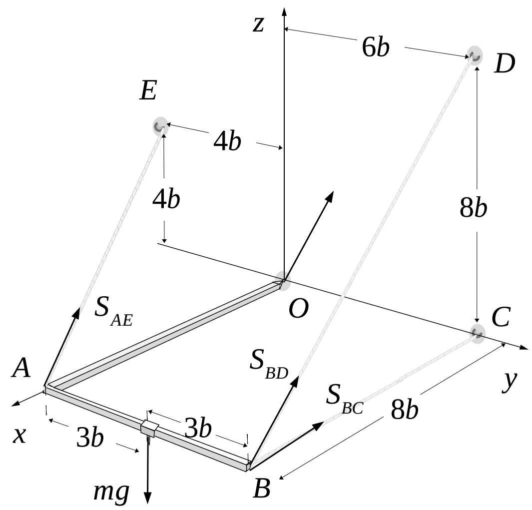


Frilägg stången! Den påverkas av tyngdkraften mg, trådkrafterna S_{AE}, S_{BD} och S_{BC} samt kontaktkraften i origo. I den glatta kulleden verkar inget kraftparsmoment.
Jämvikt fordrar att kraftsumman och kraftmomentsumman var för sig är noll, dvs att kraftsystemet bildar ett nollsystem: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

För att skriva trådkrafterna på vektorform bildas enhetsvektorena i trådriktningarna:

$$\mathbf{r}_{AE} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_A = (-8b, -4b, 4b) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{AE} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1) \tag{1}$$

$$\mathbf{r}_{BD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B = (-8b, 0, 8b) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{e}_{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \tag{2}$$

$$\mathbf{S}_{AE} = S_{AE}\mathbf{e}_{AE} = \frac{S_{AE}}{\sqrt{6}}(-2, -1, 1) \tag{3}$$

$$\mathbf{S}_{BD} = S_{BD}\mathbf{e}_{BD} = \frac{S_{BD}}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) \tag{4}$$

Vi kräver att kraftmomentet skall vara noll: $\quad (\mathbf{M}_O =) \quad \sum \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{0}$

$$\frac{bS_{AE}}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 8 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \frac{bS_{BD}}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 8 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (0, 0, 6bS_{BC}) + (-3bmg, 8bmg, 0) = \mathbf{0} \tag{5}$$

Denna vektorekvation ger komponentekvationerna

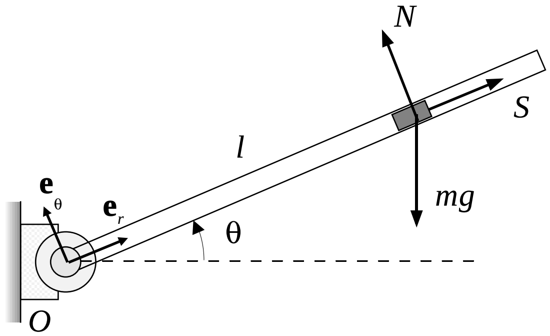
$$0 + \frac{6}{\sqrt{2}}bS_{BD} + 0 - 3bmg = 0 \tag{6}$$

$$-\frac{8}{\sqrt{6}}bS_{AE} - \frac{8}{\sqrt{2}}bS_{BD} + 0 + 8bmg = 0 \tag{7}$$

$$-\frac{8}{\sqrt{6}}bS_{AE} + \frac{6}{\sqrt{2}}bS_{BD} + 6bS_{BC} + 0 = 0 \tag{8}$$

Ekv (6) ger $\quad \underline{\underline{S_{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg}}$

Sätt in detta i ekv (8) och subtrahera ekv (7) ger $\quad \underline{\underline{S_{BC} = \frac{1}{6}mg}}\,,\ \underline{\underline{S_{AE} = \frac{\sqrt{6}}{2}mg}}$



Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ är i cylinderkoordinater

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = F_r \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = F_\theta \end{cases} \tag{1}$$

Tyngdkraft och normalkraft och trådkraft är de enda krafterna. För rörelsen vet vi att vinkelaccelerationen är konstant:

$$\ddot{\theta} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \sqrt{2\alpha\theta} \tag{2}$$

eller ännu hellre

$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\,\mathrm{d}\dot{\theta} = \alpha\,\mathrm{d}\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = 2\alpha\theta \tag{3}$$

Vi vet också att r är konstant ($\Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0$) så länge kroppen inte glider. Insättning ger

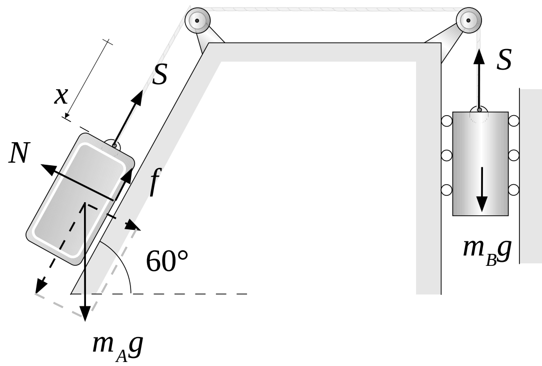
$$\begin{cases} -ml \cdot 2\alpha\theta = S - mg\sin\theta \\ ml\alpha = N - mg\cos\beta \end{cases} \tag{4}$$

Trådkraften är $$S = mg\sin\theta - ml \cdot 2\alpha\theta = mg\left(\sin\theta - \frac{2l\alpha}{g}\theta\right) \tag{5}$$

Tråden slaknar för $\theta = \frac{\pi}{2}$ ger $$S_1 = mg\left(1 - \frac{l\alpha\pi}{g}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{g}{l\pi} \tag{6}$$

Normalkraften i detta läge är $$N_1 = ml\alpha + mg\cos\frac{\pi}{2} = ml\alpha + 0 = \frac{mg}{\pi} \tag{7}$$

Svar: Normalkraften är $\underline{\underline{N_1 = \frac{mg}{\pi}}}$



Frilägg kropparna enligt figuren!

Kroppen A påverkas av trådkraft S, tyngdkraft och kontaktkraft. Kroppen B påverkas av tyngdkraft och trådkraft S.

Farten som funktion av läget skall bestämmas vilket indikerar att man skulle kunna testa en energimetod. Eftersom friktionskraften är med som en icke konservativ kraft väljer vi lagen om arbetet

$$U = T - T_0 \tag{1}$$

Vi väljer här att skriva upp denna lag för vardera kroppen. Eftersom tråden är oelastisk kommer kropparnas fart att vara densamma. Både A och B har lägesändring x. Om kraften är konstant är dess arbete kraft gånger väg. Trådkraftens arbete betecknas U_S. Insättning ger

För A:
$$m_A g \sin 60° \cdot x - \mu N \cdot x - U_S = \frac{1}{2} m_A \dot{x}^2 - 0 \tag{2}$$

För B:
$$U_S - m_B g \cdot x = \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 - 0 \tag{3}$$

Om ekvationerna adderas fås lagen om arbetet för hela systemet:

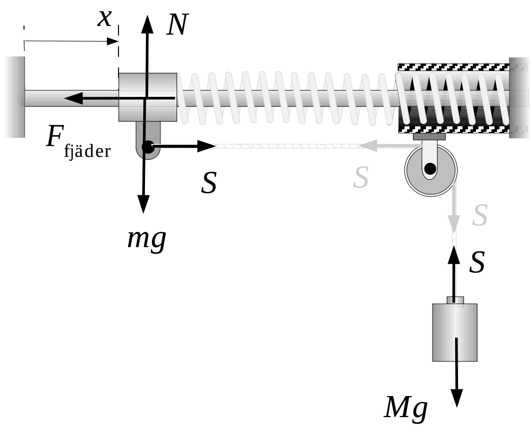
$$m_A g \sin 60° \cdot x - \mu N \cdot x - m_B g \cdot x = \frac{1}{2} m_A \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_B \dot{x}^2 - 0 \tag{4}$$

Normalkraften $N = m_A g \cos 60°$ eftersom det är ingen acceleration vinkelrätt mot lutande planet.

Detta ger
$$m_A g \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \mu\, m_A g \frac{1}{2} \cdot x - m_B g \cdot x = \frac{1}{2}(m_A + m_B)\dot{x}^2 \tag{5}$$

eller
$$\left(\sqrt{3} m_A - 2 m_B\right) g \cdot x - \mu\, m_A g \cdot x = (m_A + m_B)\dot{x}^2 \tag{6}$$

Resultatet är
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{1}{m_A + m_B}\left[\left(\sqrt{3} m_A - 2 m_B\right) - \mu\, m_A\right] g x}$$



Frilägg hylsan och motvikten enligt figuren. Hylsan påverkas i rörelseriktningen av fjäderkraften $F_{\text{fjäder}} = kx$ och trådkraften S. Eftersom trissan är lätt och lättrörlig är trådkraften på motvikten lika stor. Farten är lika stor för hylsan och motvikten.

Kraftekvationen för hylsan respektive motvikten är då

$$m\ddot{x} = -kx + S \tag{1}$$

$$M\ddot{x} = Mg - S \tag{2}$$

Trådkraften S kan elimineras genom att addera ekvationerna

$$m\ddot{x} + M\ddot{x} = -kx + S + Mg - S \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad (m + M)\ddot{x} = -kx + Mg \tag{4}$$

Svängningsekvationen är

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+M}x = \frac{Mg}{m+M} \tag{5}$$

Jämviktsläget x_0 ges av villkoret $\ddot{x} = 0$ $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_0 = \dfrac{Mg}{k}}}$

Jämförelse med standardekvationen $\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$ ger

Egenvinkelfrekvensen $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

Svängningstiden $\quad \underline{\underline{\tau_n = \dfrac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}}}$

Lagen om mekaniska energins bevarande ger (eftersom trådkrafterna tillsammans inte utför arbete.

$$T + V = T_0 + V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - Mgx = 0$$

Vändläget ges av villkoret $\dot{x} = 0$ $\quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{2Mg}{}$