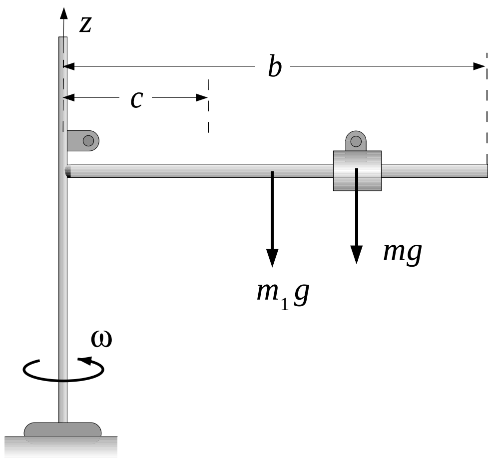


Systemet roterar helt fritt kring den fixa vertikala z-axeln. Det finns inget yttre kraftmoment M_z på hela systemet som driver eller bromsar. Tyngdkrafterna är ju parallella med z-axeln och normalkrafterna mellan stång och hylsa är inre krafter. Om stångens vinkelhastighet ändras måste det bero på den växelverkan som sker mellan hylsa och stång.

Projicera momentekvationen för hela systemet

$$\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{1}$$

på z-axeln:

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

Här är det yttre kraftmomentet noll:

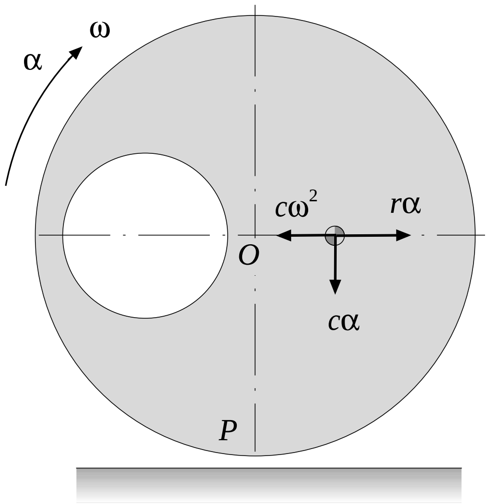
$$M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad H_z = \text{rörelsekonstant} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet för hela systemet i initialtillståndet är alltså lika med rörelsemängdsmomentet i sluttillståndet (z-komponenten avses). Rörelsemängdsmomentet för hylsan och stången adderas och vi får ekvationen

$$mc^2\omega_0 + \frac{m_1 b^2}{3}\omega_0 = mb^2\omega_1 + \frac{m_1 b^2}{3}\omega_1 \tag{4}$$

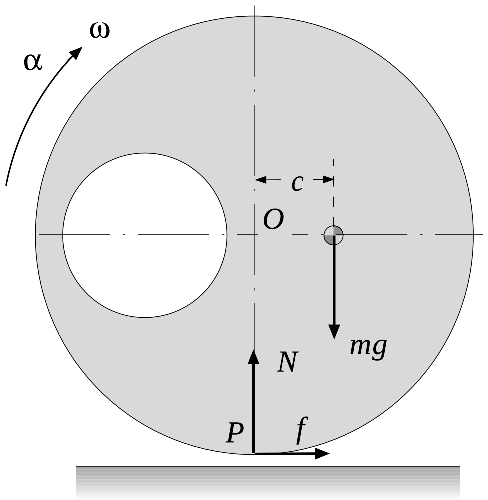
$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\omega_1 = \frac{3mc^2 + m_1 b^2}{(3m + m_1)\, b^2}\,\omega_0}}$$

Täljare och nämnare har lika dimension. Täljaren är mindre än nämnaren så att vinkelhastigheten minskar när hylsan åker utåt.



Vi bestämmer först uttrycket för masscentrums acceleration. Cylindern rullar och centrumpunkten O har en rätlinjig rörelse med hastigheten $r\dot{\theta} = r\omega$ och accelerationen $r\ddot{\theta} = r\alpha$. Masscentrums acceleration bestäms av sambandsformeln med O som reduktionspunkt:

till accelerationen $\mathbf{a}_O = r\alpha\,\mathbf{e}_x$ adderas de accelerationskomponenter som associeras med cirkelrörelse kring O (se figur!).



Frilägg cylindern! Förutom tyngdkraften mg verkar en friktionskraft f, som ska förhindra glidning, och en normalkraft N i kontaktpunkten.

Vi ställer upp kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende på masscentrum. I komponentform fås

$$\rightarrow \;:\quad f = m\left(r\alpha - c\omega^2\right) \tag{1}$$

$$\downarrow \;:\quad mg - N = mc\alpha \tag{2}$$

$$G \;:\quad N \cdot c - f \cdot r = I_G\,\alpha \tag{3}$$

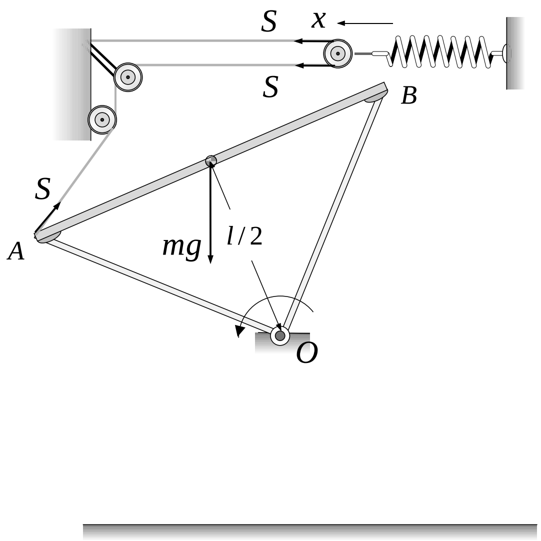
Uttrycken för f och N givna av ekv (1) och (2) sätts in i (3). Vi får

$$\left(mg - mc\alpha\right)\cdot c - m\left(r\alpha - c\omega^2\right)\cdot r = md^2\,\alpha \tag{4}$$

$$rc\omega^2 = \left(d^2 + c^2 + r^2\right)\alpha - c\,g \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{\left(d^2 + c^2 + r^2\right)\alpha - c\,g}{rc}}}}$$

Anm.: Lösningen ges mer direkt om man ställer upp momentekvationen med avseende på kontaktpunkten P.



När garageportens underkant A flyttar sig från det övre till det undre läget, dvs då vajern dragits ner en sträcka l, kommer fjäderförlängningen att vara $l/2$. Vajern har ju konstant längd och då fjädern förlängs sträckan x kommer vajerlängden $2x$ att frigöras.

Om kraften i vajern (trådkraften) betecknas S kommer fjäderkraften att vara $2S$. Detta ges av kraftekvationen för den lätta trissan vid fjädern.

Problemställningen att bestämma vinkelhastighet för ett visst läge betyder att en energimetod kan utnyttjas. Om garageporten friläggs är det tyngdkraften och trådkraften S som gör arbete. Trådkraftens arbete är lika stort som fjäderkraftens arbete eftersom fjäderkraften är dubbelt så stor medan förlängningen är hälften så stor. Vi kan alltså betrakta hela systemet och utnyttja att den mekaniska energin bevaras:

$$T_1 + V_1 = T_0 + V_0 \tag{1}$$

För tyngdkraftens potentiella energi väljer vi referensnivån vid nivån för portens vridningsaxel O. Fjäderkraftens potentiella energi är noll då fjädern har sin naturliga längd.

$$\frac{1}{2}I_O\,\omega^2 + 0 + 2\cdot\frac{1}{2}k\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0 + mg\frac{l}{2} + 0 \tag{2}$$

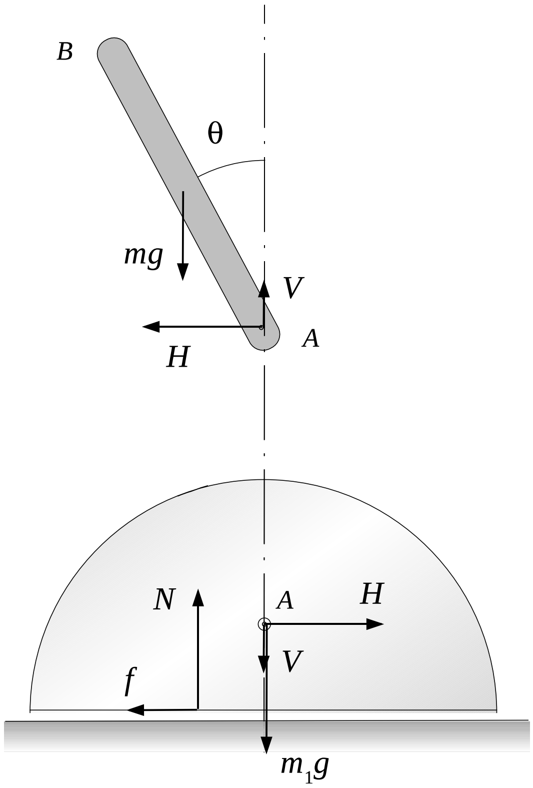
En faktor två dyker upp vid fjäderns potentiella energi, eftersom det är två fjädrar. Tröghetsmomentet fås med Steiners sats:

$$I_O = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3} \tag{3}$$

Insättning ger

$$\frac{ml^2}{6}\omega^2 + \frac{1}{4}kl^2 = mg\frac{l}{2} \tag{4}$$

Svar: Fjäderkonstant $$\underline{\underline{k = \frac{6g - 2l\omega^2}{3l}m}}$$



För ett visst friktionstal μ är den maximala friktionskraften

$$f = \mu N \tag{1}$$

Vi gör beräkningarna för detta gränsfall, då blocket och punkten A är fix. Om blocket inte börjar glida har det heller ingen acceleration. Stången har ingen hastighet i det första ögonblicket men väl en acceleration.

För enkelhets skull frilägger vi stången och blocket. Figuren visar kraftsituationen.
Stångens masscentrum har accelerationen $\frac{l}{2}\ddot{\theta}$ vinkelrätt mot stången.

Vi ställer upp kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ för vardera kroppen och momentekvationen $\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}_A$ med avseende på den fixa punkten A för stången. I komponentform fås för

blocket, som är i vila

$$\rightarrow \; : \quad H - f = 0 \tag{2}$$

$$\uparrow \; : \quad N - m_1 g - V = 0 \tag{3}$$

stången, som roterar kring fixa punkten A

$$\leftarrow \; : \quad H = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta \tag{4}$$

$$\downarrow \; : \quad mg - V = m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\sin\theta \tag{5}$$

$$\circlearrowleft A \; : \quad mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} \tag{6}$$

Ekv (6) ger $ml\ddot{\theta} = \frac{3}{2}mg\sin\theta$, vilket kan sättas in i de andra ekvationerna. Krafterna H, V och därmed N är alltså kända. Om sambandet (1) sätts in i ekv (2) erhålls

$$\frac{3}{4}mg\sin\theta\cos\theta - \mu\left[\left(mg - \frac{3}{4}mg\sin^2\theta\right) + m_1 g\right] = 0$$

Men $\theta = \beta$:

$$\underline{\underline{\mu = \frac{3mg\sin\beta\cos\beta}{4(m+m_1)g - 3mg\sin^2\beta}}}$$