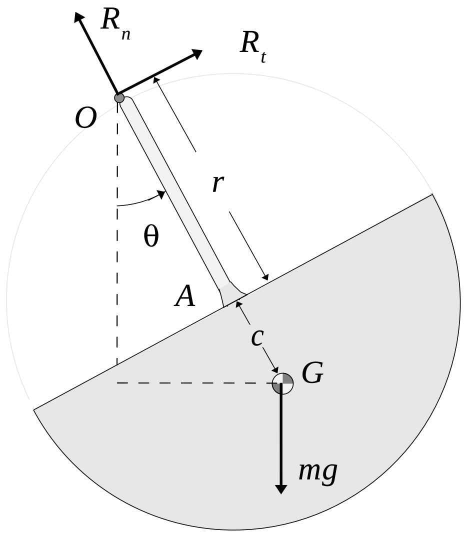


En stel kropp roterar kring en fix axel O. Masscentrum G för hela kroppen ligger på avståndet $r+c$ från O. De krafter som påverkar kroppen är tyngdkraften och reaktionskraften i upphängningspunkten O. Kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ i naturliga komponenter skrivs

$$\mathbf{e}_t: \quad R_t - mg\sin\theta = m(r+c)\ddot{\theta} \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_n: \quad R_n - mg\cos\theta = m(r+c)\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Vi måste alltså bestämma $\ddot{\theta}$ och $\dot{\theta}^2$ som funktion av vinkeln θ.

Momentekvationen med avseende på rotationsaxeln $M_z = \dot{H}_z$ blir :

$$-mg(r+c)\sin\theta = I_O\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} = -\frac{mg(r+c)}{I_O}\sin\theta \tag{3}$$

Lagen om mekaniska energins bevarande $T + V = T_0 + V_0$ ger

$$\frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 - mg(r+c)\cos\theta = 0 - mg(r+c)\cos\beta \tag{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\theta}^2 = \frac{2}{I_O}mg(r+c)(\cos\theta - \cos\beta) \tag{5}$$

Insättning i (1) och (2) ger $R_t = \left(1 - \frac{m(r+c)^2}{I_O}\right)mg\sin\theta \qquad (6)$

$$R_n = mg\cos\theta + m(r+c)^2\frac{2}{I_O}mg(\cos\theta - \cos\beta) \tag{7}$$

Bestämning av tröghetsmomentet:

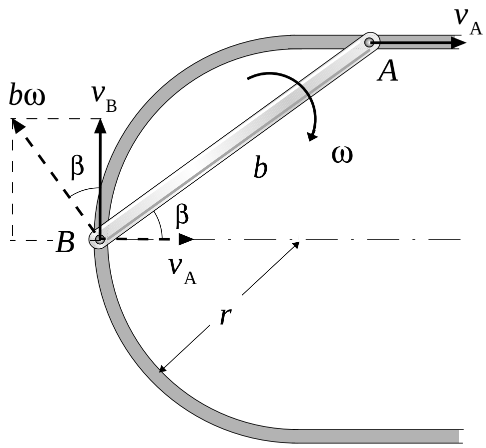
Tröghetsmomentet för en cirkelskiva med avseende på en axel vinkelrät mot skivan genom centrum är $\frac{mr^2}{2}$. Då gäller att halvcirkelskivan också har detta tröghetsmoment. För halvcirkelskivan gäller då med Steiners sats (två gånger)

$$I_G = I_A - mc^2 = \frac{mr^2}{2} - mc^2 \tag{8}$$

$$I_O = I_G + m(r+c)^2 = m\left(\frac{r^2}{2} - c^2 + (r+c)^2\right) = m\left(\frac{3r^2}{2} + 2rc\right) \tag{9}$$

Svar: $\qquad R_t = \left(1 - \frac{2(r+c)^2}{(3r^2 + 4rc)}\right)mg\sin\theta$

$$R_n = mg\cos\theta + \frac{4(r+c)^2}{(3r^2 + 4rc)}mg(\cos\theta - \cos\beta)$$



Antag att såväl vinkelhastigheten ω som vinkelaccelerationen α för stången är riktad medurs. Använd vinkeln β som hjälpstorhet, då vi ju vet att $\sin\beta = r/b$. Låt x och y-axlarna vara parallella med v_A respektive v_B.

För punkterna A och B i stången AB gäller sambandsformeln

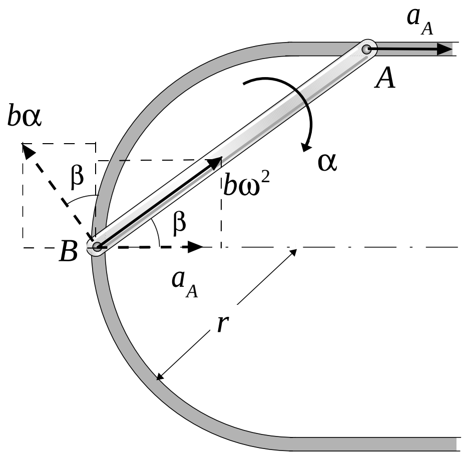
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \qquad (1)$$

som i komponentform blir:

$$\rightarrow: \quad 0 = v_A - b\omega \sin\beta \qquad (2)$$

$$\uparrow: \quad v_B = 0 + b\omega\cos\beta \qquad (3)$$

Ekv (2) ger $\omega = \dfrac{v_A}{b\sin\beta}$ och insättning i ekv (3) ger då $\underline{\underline{v_B = \dfrac{v_A}{\tan\beta}}}$ (4)



Då punkten B har en cirkelrörelse vet vi att dess centripetalacceleration är

$$\underline{\underline{a_{Bx} = \frac{v_B{}^2}{r}}} \qquad (5)$$

Sambandsformeln för accelerationer

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \qquad (6)$$

blir då i komponentform:

$$\rightarrow: \quad \frac{v_B{}^2}{r} = a_A - b\alpha\sin\beta + b\omega^2\cos\beta \qquad (7)$$

$$\uparrow: \quad a_{By} = 0 + b\alpha\cos\beta + b\omega^2\sin\beta \qquad (8)$$

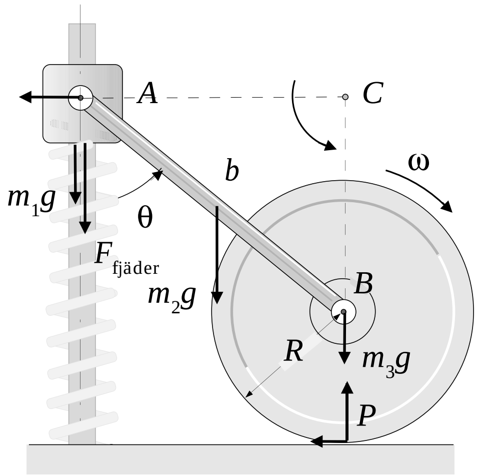
Eliminera nu α genom att multiplicera (7) med $\cos\beta$ och ekv (8) med $\sin\beta$ och därefter addera ekvationerna. Om trigonometriska ettan utnyttjas fås

$$\frac{v_B{}^2}{r}\cos\beta + a_{By}\sin\beta = a_A\cos\beta + b\omega^2 \qquad (9)$$

$$\Rightarrow \qquad a_{By} = \frac{1}{\sin\beta}\left[a_A\cos\beta + b\omega^2 - \frac{v_B{}^2}{r}\cos\beta\right] \qquad (10)$$

Om uttrycken (4) för ω och v_B sätts in fås

$$\underline{\underline{a_{By} = \frac{a_A}{\tan\beta} + \frac{v_A{}^2}{b\sin^3\beta} - \frac{v_A{}^2}{r\tan^3\beta}}}$$



Stången AB har en vinkelhastighet $\dot{\theta}$ Momentancentrum ligger i C. Hjulet antas ha vinkelhastigheten ω medurs. Sambandet mellan vinkelhastigheterna fås om momentancentrum C utnyttjas:

$$R\omega = b\cos\theta\,\dot{\theta} \tag{1}$$

Fjädern antas ha längden y i ett godtyckligt läge. Hylsans hastighet blir då $\dot{y}$.

$$y = R + b\cos\theta - \text{konstant} \qquad \dot{y} = -b\dot{\theta}\sin\theta \tag{2}$$

Tyngdkraften och fjäderkraften är här de enda krafter som gör arbete. De är konservativa, vilket innebär att den mekaniska energin bevaras:

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{3}$$

För tyngdkraftens potentiella energi väljer vi referensnivån vid nivån för hjulets centrum. Fjäderkraftens potentiella energi är noll då fjädern har sin naturliga längd. Uttrycket för kinetisk energi kan allmänt för varje kropp med momentancentrum C skrivas $\frac{1}{2}I_C\omega^2$. Hjulets momentancentrum är P. Insättning i (2) ger då

$$\frac{1}{2}I_P^{\text{cyl}}\omega^2 + \frac{1}{2}I_C^{\text{stång}}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + m_1gb\cos\theta + m_2g\frac{b}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(y-l)^2 = m_1gb\cos\beta + m_2g\frac{b}{2}\cos\beta \tag{4}$$

Tröghetsmomenten fås med Steiners sats. Insättning i (4) ger ekvationen

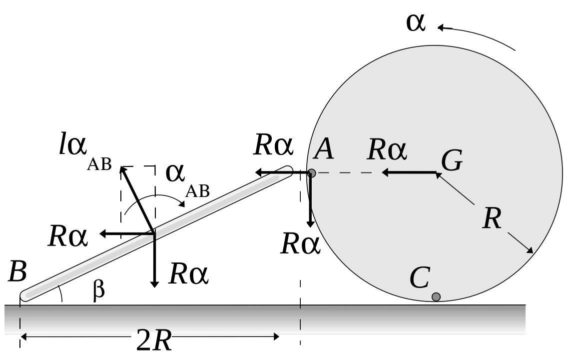
$$\frac{3m_3R^2}{4}\omega^2 + \frac{m_2b^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)gb\cos\theta + \frac{1}{2}k(y-l)^2 = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)gb\cos\beta \tag{5}$$

Insättning av det kinematiska sambanden (1) och (2) ger

$$\left[\frac{3m_3b^2\cos^2\theta}{4} + \frac{m_2b^2}{6} + \frac{1}{2}m_1b^2\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kb^2(\cos\beta - \cos\theta)^2 = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)gb(\cos\beta - \cos\theta)$$

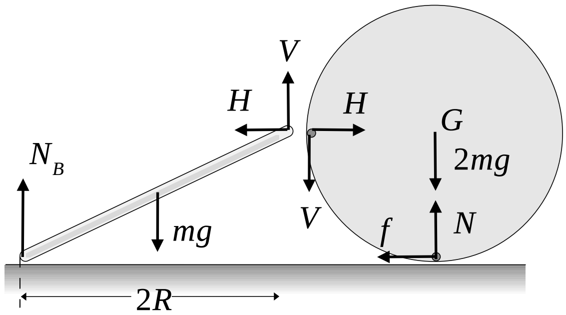
Vinkelhastigheten blir alltså

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{(12m_1 + 6m_2)(\cos\beta - \cos\theta)g/b - 6k(\cos\beta - \cos\theta)^2}{9m_3\cos^2\theta + 2m_2 + 6m_1\sin^2\theta}}$$



Vi börjar med kinematiken. Kalla stångens längd för $2l$ och vinkeln mellan stång och bord för β. Cylindern rullar vilket ger $a_G = R\alpha$ åt vänster. Sambandsformeln ger då accelerationen för punkten A, som visas i figuren. Sambandsformeln för stången ger sedan accelerationens komponenter i stångens masscentrum enligt figur. Punkten B har ingen vertikal acceleration. Detta villkor kan skrivas $2l\alpha_{AB}\cos\beta - R\alpha = 0$

$$2R\alpha_{AB} - R\alpha = 0 \qquad \alpha_{AB} = \frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$



Vi går nu över till kinetiken (dynamiken). Friläggning enligt figur.

Vi ställer upp kraftekvationen $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$ och och momentekvationen $\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ med avseende på masscentrum för båda kropparna. I komponentform fås

Stången:

$$\leftarrow : \quad H = mR\left(\alpha + \frac{\alpha}{4}\right) \qquad (2)$$

$$\uparrow : \quad V + N_B - mg = -mR\frac{\alpha}{2} \qquad (3)$$

$$\curvearrowright : \quad N_B \cdot R - V \cdot R - H\frac{R}{2} = \frac{m(2l)^2}{12}\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

Cylinder

$$\leftarrow : \quad f - H = 2mR\alpha \qquad (5)$$

$$\uparrow : \quad N - V - 2mg = 0 \qquad (6)$$

$$\circlearrowleft G : \quad V \cdot R - f \cdot R = \frac{2mR^2}{2}\alpha \qquad (7)$$

Dessa ekvationer i ordningen (2), (5), (7), (6), (3) och (4) ger

$$H = \frac{5}{4}mR\alpha; \qquad f = \frac{13}{4}mR\alpha; \qquad V = \frac{17}{4}mR\alpha;$$

$$N = \frac{17}{4}mR\alpha + 2mg; \qquad N_B = -\frac{19}{4}mR\alpha + mg$$

$$-\frac{19}{4}mR\alpha + mg - \frac{17}{4}mR\alpha - \frac{5}{8}mR\alpha = \frac{5}{24}mR\alpha$$

$$mg = \frac{236}{24}mR\alpha \qquad \underline{\underline{\alpha = \frac{6g}{59R}}}$$