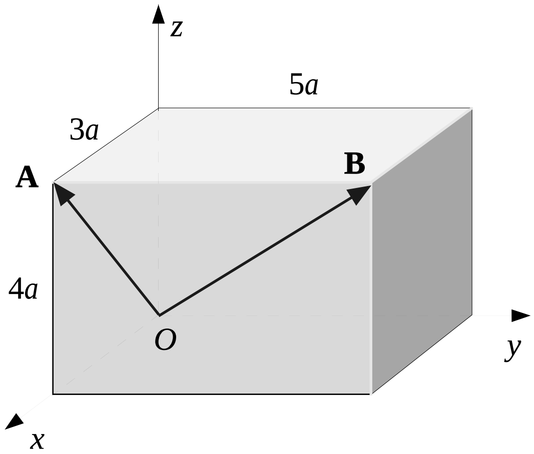
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL A

LP A.1



I detta exempel är geometrin så enkel att de sökta vinklarna med lite eftertanke kan bestämmas nästan direkt. Vi följer ändå en metod som alltid fungerar. Vektorerna kan skrivas i komponentform:

$$\mathbf{A} = (3,\,0,\,4)a$$
$$\mathbf{B} = (3,\,5,\,4)a$$

Vinkeln θ mellan två vektorer ges av definitionen på skalärprodukt:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

Insättning ger
$$\cos\theta = \frac{(3,\,0,\,4)a\cdot(3,\,5,\,4)a}{\sqrt{(3^2+0^2+4^2)a^2}\sqrt{(3^2+5^2+4^2)a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{(3\cdot3+0\cdot5+4\cdot4)a^2}{a\sqrt{25}\cdot a\sqrt{50}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{25}{\sqrt{25}\sqrt{2}\sqrt{25}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) Vinkeln fås direkt ur figuren: $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$

c) Avståndet mellan spetsen på vektorn $\mathbf{B}$ och z-axeln är med hjälp av Pythagoras sats $\sqrt{34}a$. Vinkeln fås direkt ur figuren: $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$

d) En normalvektor till planet är

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} a^2 = (-20,\,0,\,15)a^2$$

Antag att den sökta vinkeln är φ. Vinkeln mellan denna normalvektor och z-axeln ges av skalärproduktdefinitionen:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{n}}{1\cdot|\mathbf{n}|} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{(0,\,0,\,1)\cdot 5(-4,\,0,\,3)a^2}{5\sqrt{16+0+9}\,a^2} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{3}{5}$$