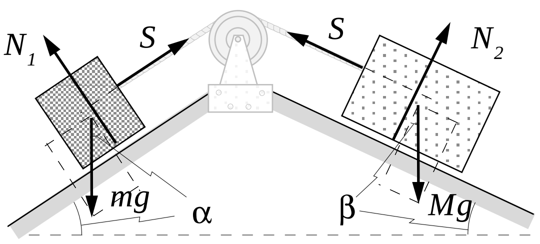
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 3

LP 3.1



Antag att den högra lådans massa är M. Frilägg båda lådorna!

Friläggningsfiguren, som skall innehålla praktiskt taget all information som behövs för att lösa problemet, visas här.

Kontaktkrafterna mot de lutande planen är normalkrafter, N_1 och N_2, eftersom friktionskrafter saknas enligt texten.

Trådkraften S är lika på båda sidor om trissan, eftersom den är lättrörlig.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på varje låda bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar kraftekvationen i planens riktningar:

vänstra lådan $\nearrow$: $\quad S - mg\sin\alpha = 0 \qquad (1)$

högra lådan $\nwarrow$: $\quad S - Mg\sin\beta = 0 \qquad (2)$

$$\Rightarrow \quad mg\sin\alpha = Mg\sin\beta \quad \Rightarrow \quad M = \frac{mg\sin\alpha}{g\sin\beta} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{M = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}m}} \qquad (4)$$

Kommentar:

Svaret är dimensionsriktigt.

Specialfall är $\quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \quad M = m$

$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad M = 0$,

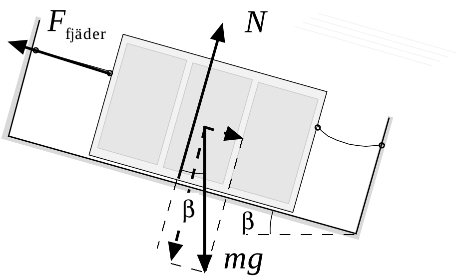
vilket betyder att jämvikten då inte är möjlig för två lådor.

$\beta \to 0 \quad \Rightarrow \quad M \to \infty$,

vilket betyder att det fordras i princip en fast punkt att fästa tråden i.

Normalkrafterna bestäms ur kraftekvationerna vinkelrätt mot de lutande planen. Momentekvationerna för vardera lådan ger normalkrafternas verkningslinjer, som måste gå genom skärningspunkten för trådkraftens och tyngdkraftens verkningslinjer (se figur!).

LP 3.3



Frilägg containern från fjädern och underlaget! Inför motsvarande krafter, fjäderkraften och normalkraften! Fjäderkraften är

$$F_{\text{fjäder}} = k\Delta l \qquad (1)$$

där $F_{\text{fjäder}} = k\Delta l$ är förlängningen av fjädern räknat från den naturliga längden.

Jämvikt fordrar att kraftsystemet på containern bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar kraftekvationen i normalkraftens och fjäderkraftens riktningar:

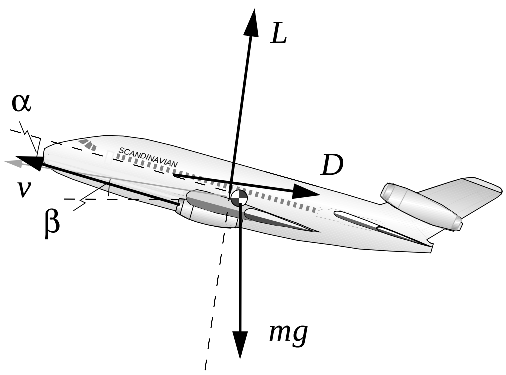
$$\nwarrow: \qquad F_{\text{fjäder}} - mg\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\nearrow: \qquad N - mg\cos\beta = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{F_{\text{fjäder}} = mg\sin\beta}} \qquad \underline{\underline{N = mg\cos\beta}}$$

Trådens förlängning är enligt sambandet (1) $\quad \underline{\underline{\Delta l = \dfrac{mg}{k}\sin\beta}}$

LP 3.4



Konstant hastighet motsvarar ett jämviktstillstånd. Då fordras att kraftsystemet på flygplanet bildar ett *nollsystem*, dvs kraftsumman är nollvektorn och kraftmomentet med avseende på någon punkt är nollvektorn. Vi projicerar nu kraftekvationen i motståndskraftens och lyftkraftens riktningar:

$$\nwarrow: \quad T\cos\alpha - D - mg\sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\nearrow: \quad T\sin\alpha + L - mg\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

Lös ut först $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$ ur dessa ekvationer och bilda sedan $\tan\alpha$!

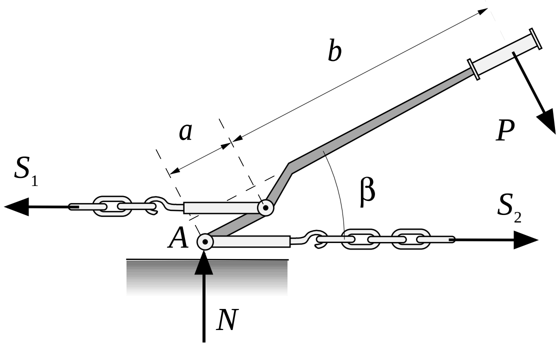
$$\underline{\underline{\tan\alpha = \frac{mg\cos\beta - L}{D + mg\sin\beta}}}$$

För att bestämma T kan vi ur (2) och (3) först bilda $T^2\cos^2\alpha$ respektive $T^2\sin^2\alpha$. Summan blir enligt "trigonometriska ettan" T^2.

$$\Rightarrow \qquad T^2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \left(mg\cos\beta - L\right)^2 + \left(D + mg\sin\beta\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{T = \sqrt{\left(mg\cos\beta - L\right)^2 + \left(D + mg\sin\beta\right)^2}}}$$

LP 3.5



Kontaktytan vid A är glatt. Om kraft-systemet kompletteras med normal-kraften N har vi en friläggningsfigur.

Vi antar att systemets massa kan för-summas, dvs att tyngden är försumbar jämfört med de krafter som skall be-stämmas.

Hävstångens idé gör att vi förväntar oss att kraften P är mindre än spänn-krafterna i kedjorna.

Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\rightarrow: \quad -S_1 + S_2 + P\sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N - P\cos\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft A: \quad a\sin\beta \cdot S_1 - 0\cdot S_2 - (a+b)\cdot P = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger

$$P = \frac{a\sin\beta}{(a+b)}S_1 \qquad (4)$$

Ekv (1) ger

$$S_2 = S_1 - \frac{a\sin\beta}{(a+b)}S_1 \cdot \sin\beta \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad S_2 = \left(1 - \frac{a\sin^2\beta}{(a+b)}\right)S_1 \qquad (6)$$

Kommentar:

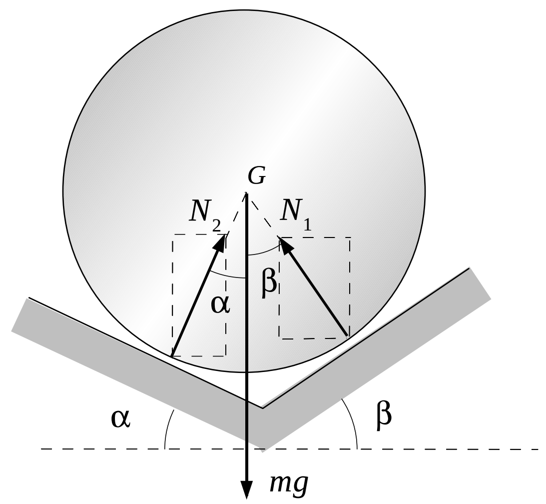
Svaren är helt klart dimensionsriktiga. En trigonometrisk funktion har dimen-sionen ett.

För vinkeln $\beta = \pi/2$ är kraften P horisontell och storleken måste vara lika med skillnaden i spännkrafternas storlek. För denna vinkel fås den kraftförstoring, som man förväntar sig av hävstången, nämligen

$$\frac{P}{S_1} = \frac{a}{a+b}$$

För vinkeln $\beta = 0$ är kraften P vertikal och spännkrafternas storlek är enligt ekv (6) lika. Ekv (4) säger att det behövs en mycket liten kraft P för att hålla en viss spännkraft S_1.

LP 3.6



Frilägg cylindern från underlaget! Den påverkas av tyngdkraften mg och de två normalkrafterna N_1 och N_2.
Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow: \quad -N_1 \sin\beta + N_2 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_1 \cos\beta + N_2 \cos\alpha - mg = 0 \qquad (2)$$

Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.
Med ekv (1) kan vi uttrycka N_2 i N_1:

$$N_2 = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} N_1 \qquad (3)$$

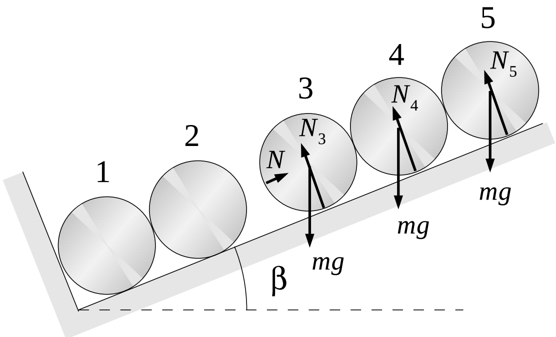
Insättning i (2) ger

$$N_1 \cos\beta + N_1 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha = mg$$

$$N_1(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) = mg\sin\alpha \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{N_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} mg}}; \qquad \underline{\underline{N_2 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} mg}}$$

LP 3.7



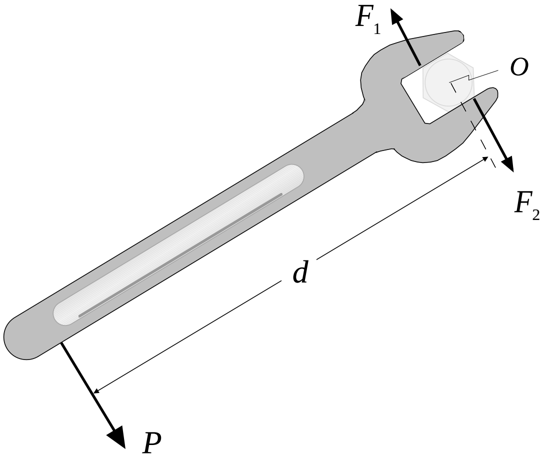
Frilägg de tre översta cylindrarna. Detta system påverkas av de yttre krafterna mg (tre stycken), en normalkraft N samt de tre normalkrafterna N_3, N_4 och N_5. För att bestämma kraften N behövs bara en ekvation.

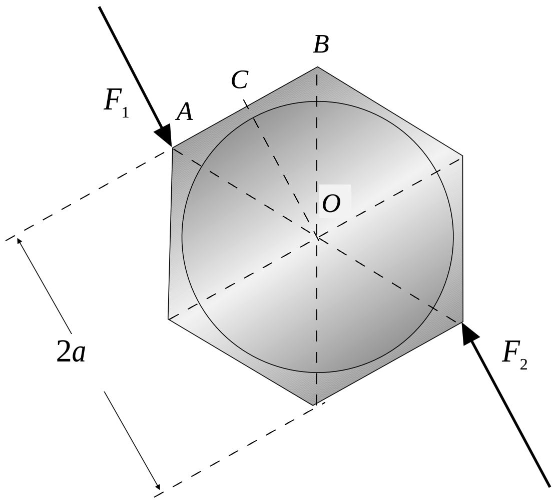
Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\nearrow: \quad N - 3mg\sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{N = 3mg\sin\beta}}$$

LP 3.9





Frilägg nyckeln och muttern. Muttern påverkas av krafterna F_1 och F_2 från nyckeln samt en reaktionskraft och ett kraftparsmoment från gängan. Nyckeln påverkas av krafterna F_1 och F_2 från muttern samt kraften P från handen. Avståndet mellan verkningslinjerna för F_1 och F_2 är enligt geometrin (med liksidiga, likvinkliga trianglar) $2a/\sqrt{3}$.

Jämvikt för den frilagda nyckeln fordrar:

$$\rightarrow: \quad F_1 - F_2 - P = 0 \qquad (1)$$

$$\circlearrowleft O: \quad P \cdot d - F_2 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} - F_1 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = 0 \qquad (2)$$

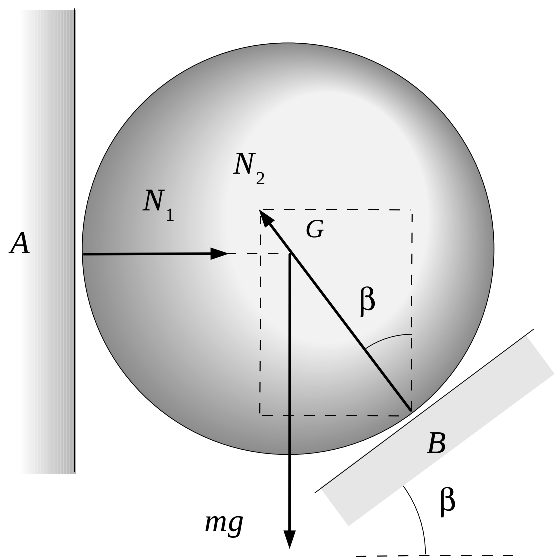
Dividera ekv (2) med $a/\sqrt{3}$ och addera sedan de två ekvationerna!

$$F_1 - F_2 - P + P \cdot \frac{\sqrt{3}\,d}{a} - F_2 - F_1 = 0$$

$$\underline{\underline{F_2 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{a} - 1\right)\frac{P}{2}}}$$

Då ger ekv (1) $\underline{\underline{F_1 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{a} + 1\right)\frac{P}{2}}}$

LP 3.10



Frilägg klotet från väggen och det lutande planet! Det påverkas av tyngdkraften mg och normalkrafterna N_1 och N_2. Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow: \quad N_1 - N_2 \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_2 \cos\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

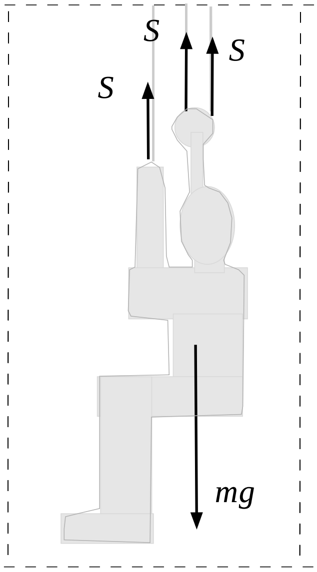
Ekv (2) ger $N_2 = \dfrac{mg}{\cos\beta}$

Insättning i (1) ger $N_1 = \dfrac{mg}{\cos\beta}\sin\beta$

Resultatet är alltså

$$\underline{\underline{N_1 = mg\tan\beta}}\ ; \qquad \underline{\underline{N_2 = \frac{mg}{\cos\beta}}}$$

LP 3.11



Frilägg systemet man+stol+nedre trissan! Antag att mannen drar med kraften S i linan. Denna trådkraft är lika stor i alla delar av tråden. Det motiveras av att trissorna är lätta och lättrörliga och därför måste momentekvationen med avseende på varje trissas centrum vara noll.

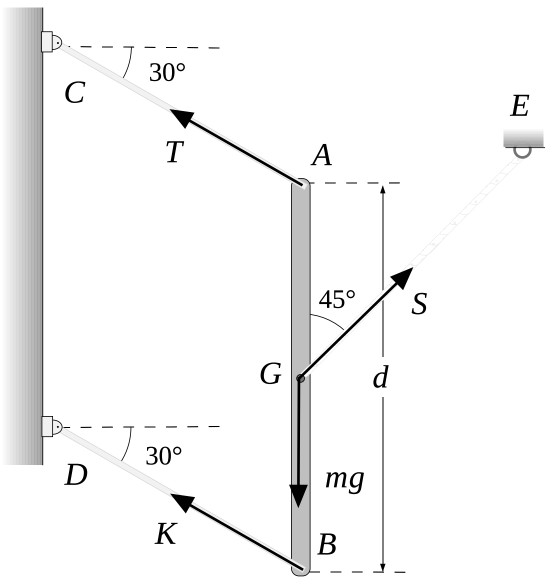
Jämvikt för det frilagda systemet fordrar:

$$\uparrow: \quad 3S - mg = 0 \qquad (1)$$

Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

Ekv (1) ger $\underline{\underline{S = \frac{1}{3}mg}}$

LP 3.12



Stängerna AC och BD är lätta och måste då vara tvåkraftskroppar. Kontaktkrafternas verkningslinjer måste då gå genom ändpunkterna. Frilägg stången AB och inför krafterna mg, S, T och K enligt figuren!

Jämvikt för den frilagda kroppen fordrar:

$$\rightarrow: \quad \frac{\sqrt{2}}{2}S - \frac{\sqrt{3}}{2}T - \frac{\sqrt{3}}{2}K = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}K + \frac{\sqrt{2}}{2}S - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft G: \quad \frac{d}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}T - \frac{d}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}K = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger $\quad T = K \qquad (4)$

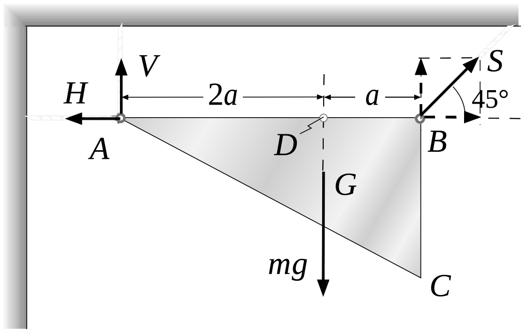
Ekv (1) ger då $\quad K = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}S \qquad (5)$

Insättning i (2) ger $\quad \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}S + \frac{\sqrt{2}}{2}S - mg = 0 \qquad (6)$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)S = mg; \qquad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}mg}}$$

Anm.: Resultatet kan fås direkt om man projicerar kraftekvationen på en riktning som är vinkelrät mot de lätta stängerna.

LP 3.13



I detta problem ingår egentligen en masscentrumberäkning om man inte slår upp i en tabell. För en triangel ligger masscentrum på avståndet en tredjedel av höjden från basen räknat. Se appendix i problemsamlingen! Tre obekanta kraft-er söks. Vi måste alltså ställa upp tre ekvationer.

Frilägg plåtskivan! Jämvikt för den frilagda plåtskivan fordrar:

$$\rightarrow: \quad -H + \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad V + \frac{\sqrt{2}}{2}S - mg = 0 \qquad (2)$$

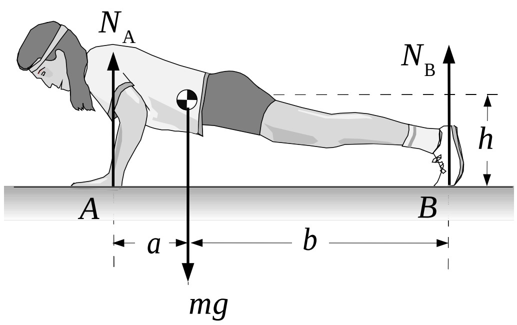
$$\curvearrowleft D: \quad -2a \cdot V + a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}S = 0 \qquad (3)$$

Enligt ekv(1) och (3) är $H = \frac{\sqrt{2}}{2}S$ och $V = \frac{\sqrt{2}}{4}S$ (4)

Insättning i ekv(2) ger $\frac{\sqrt{2}}{4}S + \frac{\sqrt{2}}{2}S = mg \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4}{3\sqrt{2}}mg$ (5)

Svar: $\underline{\underline{H = \frac{2}{3}mg}}$, $\underline{\underline{S = \frac{1}{3}mg}}$, $\underline{\underline{S = \frac{4}{3\sqrt{2}}mg}}$

LP 3.14



Frilägg personen och inför normalkraft-erna N_A och N_B! Långsam armhävning betyder att accelerationen är försumbar och att varje läge kan ses som ett jämviktsläge.

Jämvikt fordrar:

$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\curvearrowleft A: \quad N_B \cdot (a+b) - mg \cdot a = 0 \qquad (2)$$

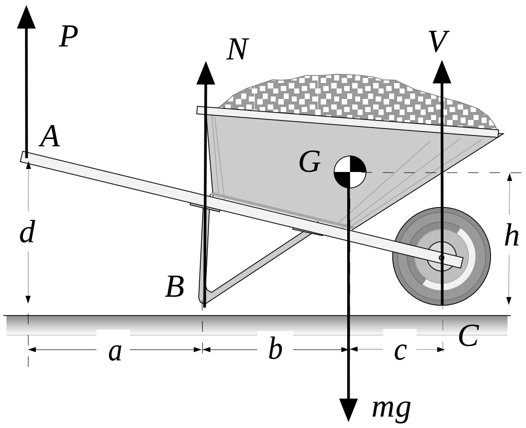
Momentjämvikt kräver att alla tre krafterna går genom centrumpunkten G.

Ekv (2) ger $N_B = \frac{a}{a+b}mg$

Ekv (1) ger då $N_A = \frac{b}{a+b}mg$

Man kan också i stället för ekv (1) ställa upp momentekvationen med avseende på B, vilket mer direkt ger resultatet.
Speciellt för fallet $b = 3a$ fås $N_B = mg/4$; $N_A = 3mg/4$.

LP 3.15



Frilägg skottkärran och inför reaktionskrafterna vid B och C! Krafterna P och mg är vertikala. Eftersom hjulet är fritt rörligt och kontaktkraften vid C saknar en horisontell komposant så är också kontaktkraften vid B vertikal.

Om $N = 0$ så kan $P_{\min}$ bestämmas med momentekvationen med avseende på C:

$$mg \cdot c - P_{\min} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \Rightarrow$$

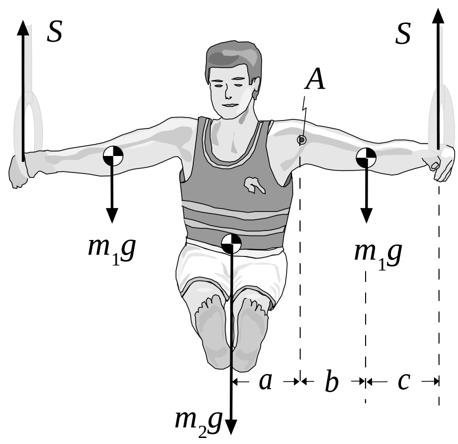
$$\underline{\underline{P_{\min} = \frac{c}{a+b+c} mg}}$$

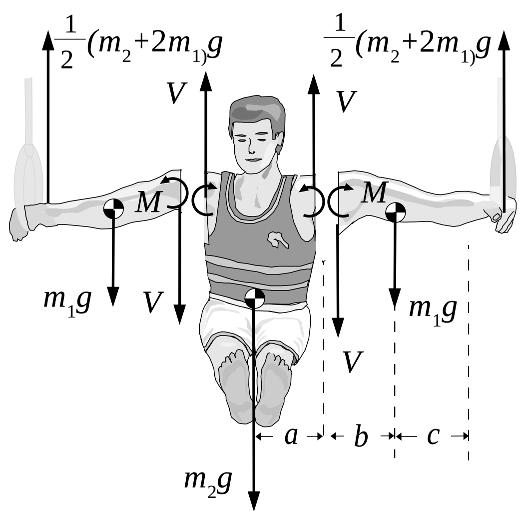
$$mg \cdot c - P_{\min} \cdot (a+b+c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P_{\min} = \frac{c}{a+b+c} mg}}$$

Om $P = 0$ så kan N bestämmas med momentekvationen med avseende på C:

$$mg \cdot c - N \cdot (b+c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N = \frac{c}{b+c} mg}}$$

LP 3.16





Frilägg gymnasten från ringarna!
Jämvikt för hela gymnasten fordrar att de vertikala krafterna på händerna tar upp hela tyngden.

$$\uparrow: \quad 2S - m_2 g - 2m_1 g = 0 \qquad (1)$$

$$S = m_1 g + \frac{1}{2} m_2 g \qquad (2)$$

Frilägg armarna från resten av kroppen och inför kraften V och kraftparsmomentet M.
Jämvikt för resten av kroppen fordrar

$$\uparrow: \quad 2V - m_2 g = 0 \qquad (3)$$

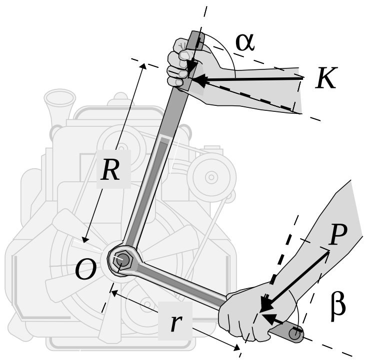
$$\underline{\underline{V = \frac{1}{2} m_2 g}} \qquad (4)$$

Jämvikt fordrar nu för vänsterarmen (den högra i figuren)

$$\curvearrowleft A: \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) g(b+c) - m_1 g b + M = 0 \qquad (5)$$

$$\underline{\underline{M = -\frac{1}{2} m_2 g(b+c) - m_1 g c}}$$

LP 3.17



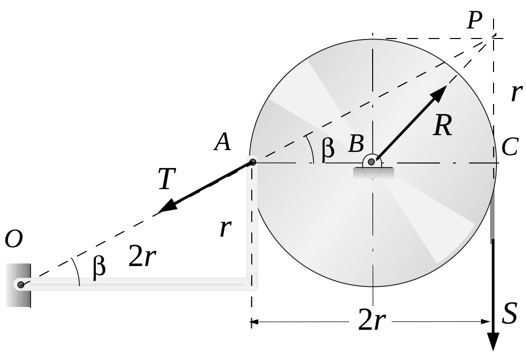
Vi förutsätter att skruven O sitter fast. Jämvikt fordrar att kraftmomentet med avseende på en axel genom O vinkelrät mot figurens plan är noll:
Dela upp krafterna K och P i komposanter parallella och vinkelräta mot nycklarna. Det är bara komposanterna som är vinkelräta mot nycklarna som ger ett kraftmoment.

$$O: \quad K\sin\alpha \cdot R - P\sin\beta \cdot r = 0 \qquad (1)$$

$$\underline{\underline{K = \frac{r\sin\beta}{R\sin\alpha}P}}$$

Numeriskt fås $\qquad K = \dfrac{0.3 \cdot 2 \cdot 2}{0.4 \cdot 3} 60 \text{ N} = 60 \text{ N}$

LP 3.18



Vinkelstången OA är en tvåkraftskropp så att kontaktkraften i A måste ha en verkningslinje som går genom O.

Frilägg nu cylindern från vinkelstången och den glatta axeln vid B. Inför motsvarande krafter T och R. Krafterna T och S har kända riktningar. Eftersom cylindern är en trekraftskropp måste reaktionskraften R ha en riktning genom P. Om figuren ritas på detta sätt har vi indirekt ställt upp momentekvationen, eftersom den kräver att momentet skall vara noll med avseende på P.

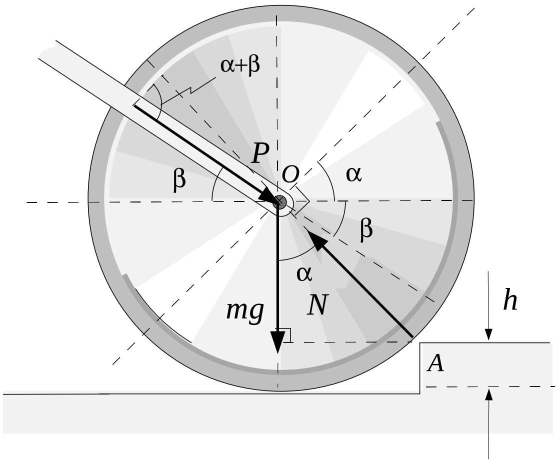
Jämvikt fordrar också att

$$A: \quad \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot r - S \cdot 2r = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R = 2\sqrt{2}\, S}} \qquad (1)$$

$$B: \quad T\sin\beta \cdot r - S \cdot r = 0 \qquad (2)$$

Men geometrin ger $\qquad \sin\beta = \dfrac{r}{r\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \sqrt{5}\, S}}$

LP 3.19



Betrakta ett jämviktsläge då kroppen just lättat från underlaget och bara vilar mot kanten vid A. Frilägg välten!

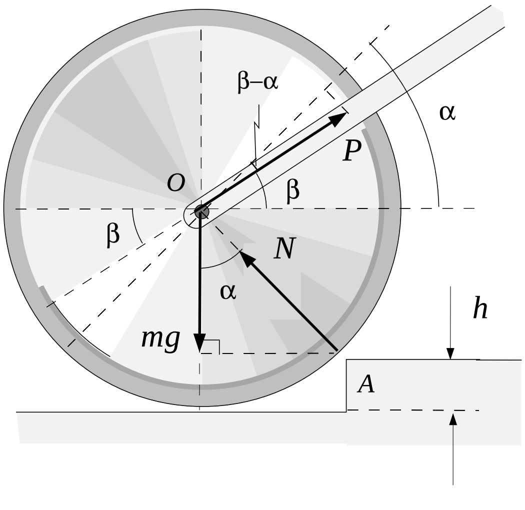
Om cylindern roterar lätt finns bara en normalkraft N vid A. Den har sin verkningslinje genom centrum O. De övriga krafterna är tyngdkraften mg och dragkraften P. Välten är en trekraftskropp. Krafternas verkningslinjer går genom O. (Om en friktionskraft skulle existera vid A måste den också motsvaras av ett kraftparsmoment på grund av friktion vid axeln O.)

Inför den vinkel α som radien OA (eller normalkraften N) bildar med vertikalen. Med en kraftekvation i en riktning vinkelrät mot OA kan normalkraften vid A elimineras direkt.

Jämvikt fordrar:

$$P\cos(\beta+\alpha) - mg\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{P = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\beta+\alpha)}}}$$

LP 3.20



Betrakta ett jämviktsläge då kroppen just lättat från underlaget och bara vilar mot kanten vid A. Frilägg välten!

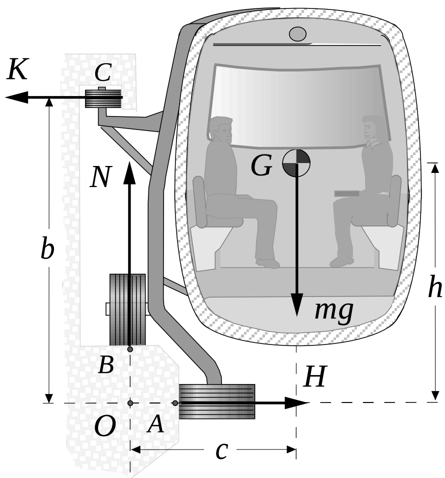
Om cylindern roterar lätt finns bara en normalkraft N vid A. Den har sin verkningslinje genom centrum O. De övriga krafterna är tyngdkraften mg och dragkraften P. Välten är en trekraftskropp. Krafternas verkningslinjer går genom O. (Om en friktionskraft skulle existera vid A måste den också motsvaras av ett kraftparsmoment på grund av friktion vid axeln O.)

Inför den vinkel α som radien OA (eller normalkraften N) bildar med vertikalen. Med en kraftekvation i en riktning vinkelrät mot OA kan normalkraften vid A elimineras direkt.

Jämvikt fordrar:

$$P\cos(\beta-\alpha) - mg\sin\alpha = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{P = \frac{mg\sin\alpha}{\cos(\beta-\alpha)}}}$$

LP 3.21



Frilägg vagnen från kontaktytorna där friktionskrafterna är försumbara.

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad H - K = 0$$

$$\uparrow: \quad N - mg = 0$$

$$\curvearrowleft O: \quad K \cdot b - mg \cdot c = 0$$

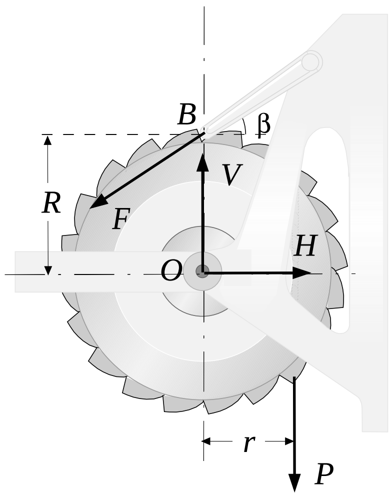
$$\Rightarrow \quad N = mg$$

$$H = K = \frac{c}{b} mg$$

Nu var det två par av varje hjul så om normalkrafterna på enstaka hjul söks så är de

$$\underline{\underline{N_B = \frac{mg}{2}}} \qquad \underline{\underline{N_A = N_C = \frac{c}{2b} mg}}$$

LP 3.22



Frilägg vinschtrumman från spärren och rotationsaxeln. Spärren är lätt och därför en tvåkraftskropp. Kraften F måste gå i samma riktning som spärren AB.
Vi förutsätter en glatt rotationsaxel.

Jämvikt fordrar:

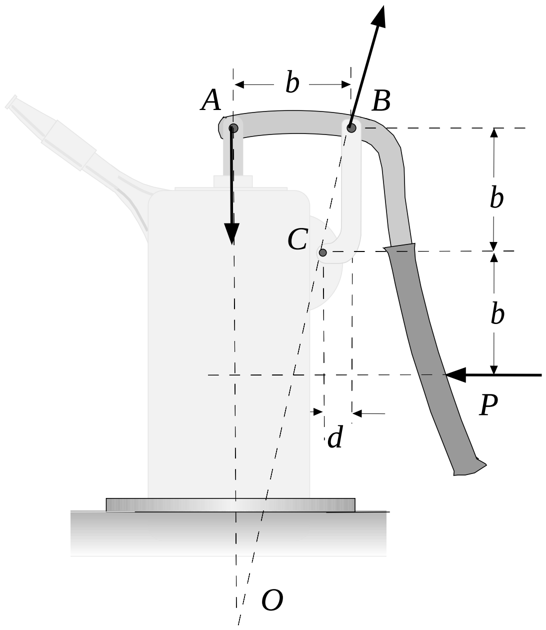
$$\curvearrowleft B: \quad H \cdot R - P \cdot r = 0$$

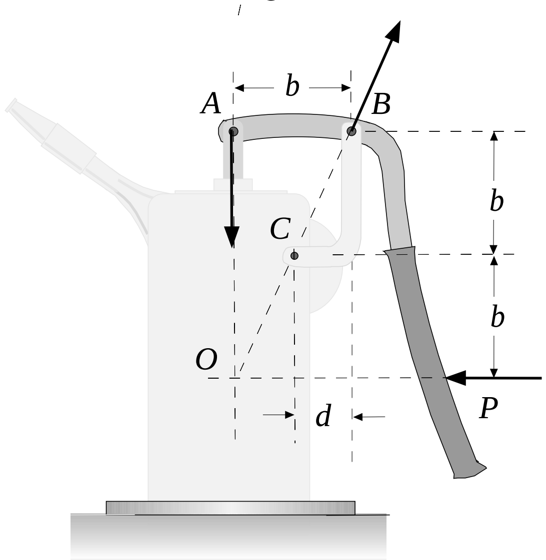
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{r}{R} P}}$$

$$\curvearrowleft C: \quad V \cdot \frac{R}{\tan\beta} - P \cdot \left(r + \frac{R}{\tan\beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{V = \frac{r\tan\beta + R}{R} P}}$$

LP 3.23





Frilägg handtaget! Det påverkas av kraften P samt reaktionskrafter i lederna A och B. I leden A förutsätter vi enligt problemtexten att kraften är vertikal.

Vilken riktning har kraften i B?
Jo, eftersom länkarmen BC är en tvåkraftskropp måste kraftens verkningslinje gå genom C. Se figur 1!

Men handtaget är en trekraftskropp. Det betyder att verkningslinjen också måste gå genom de andra två verkningslinjernas skärningspunkt O. Se figur 2!

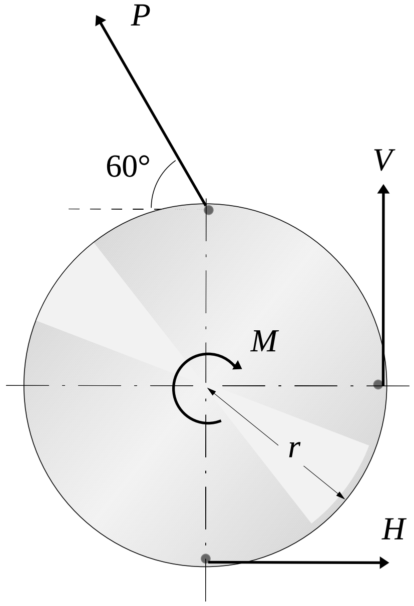
Likformighet ger

$$\frac{d}{b} = \frac{b}{2b} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{d = \frac{b}{2}}}$$

Observera att det är momentekvationen som blir satisfierad genom detta geometriska resonemang. Kraftmomentet med avseende på O måste vara noll.

LP 3.24



Frilägg cirkelskivan enligt figuren!

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad H - \frac{1}{2}P = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad V + \frac{\sqrt{3}}{2}P = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft O: \quad r \cdot \frac{P}{2} + r \cdot V + r \cdot H - M = 0 \qquad (3)$$

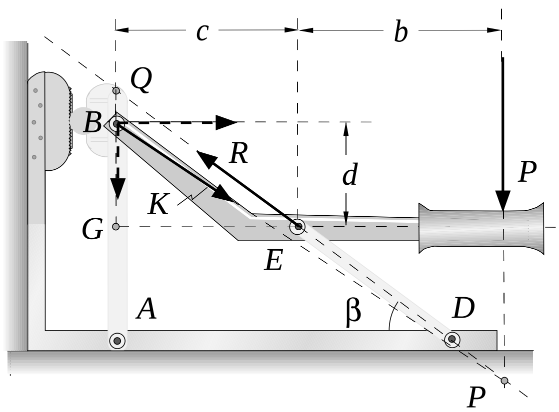
Uttryck H och H i H med hjälp av (1) och (2). Sätt in i ekv (3):

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)Pr - M = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{P = \frac{2M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$$

Insättning i ekv (1) och (2) ger $\underline{\underline{H = \frac{M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$ och $\underline{\underline{V = -\frac{\sqrt{3}M}{\left(2-\sqrt{3}\right)r}}}$

LP 3.25



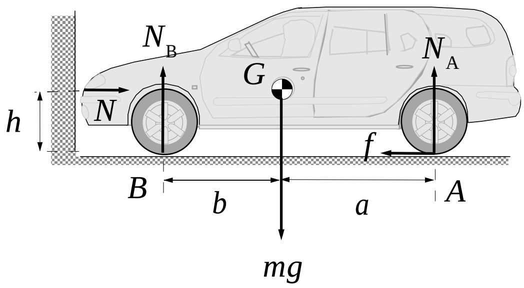
Frilägg armen enligt figuren och inför reaktionskrafterna K och R!

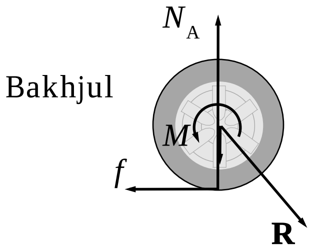
Länkarmen DE är en tvåkraftskropp och kraften R måste alltså ha en verkningslinje genom D och E. Hela den frilagda armen är en trekraftskropp. Verkningslinjen för kraften K måste alltså gå genom punkten P. Vi skall bestämma den horisontella delen av kraften K. Vi eliminerar därför den ointressanta kraften R genom att ställa upp momentekvationen med avseende på Q

Avståndet QG är $c\tan\beta$. Hävarmen till den horisontella kraftkomponenten av K, som vi kallar K_1 blir då $c\tan\beta - d$. Momentekvationen med avseende på Q blir

$$(c\tan\beta - d)K_1 - P(b+c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{K_1 = \frac{b+c}{c\tan\beta - d}P}}$$

LP 3.27





Frilägg bilen från vägg och underlag!

Bilens tyngd är mg**.** Vid kontaktytan mot väggen finns enligt text bara en horisontell normalkraft N.

Framhjulen antas rulla lätt så att det finns inte någon friktionskraft där mot marken. Om bilen drivs framåt måste alltså motsvarande framåtriktade kraft vara friktionskraften vid bakhjulens kontakt med marken.

Om bakhjulsparet friläggs ser man att det förutom kontaktkraften påverkas av en kraft **R** från resten av bilen, en tyngdkraft och ett kraftparsmoment M.

Jämvikt för hjulparet fordrar:

$$O: \quad M - f \cdot r = 0$$

Detta förklarar sambandet mellan det drivande momentet och friktionskraften men behövs inte för att lösa detta problem.

Jämvikt för den frilagda bilen fordrar:

$$\rightarrow: \quad N - f = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad N_A + N_B - mg = 0 \qquad (2)$$

$$A: \quad mg \cdot a - N_B \cdot (a + b) - N \cdot h = 0 \qquad (3)$$

Normalkraften N är känd. Det betyder att N_B ges av ekv (3):

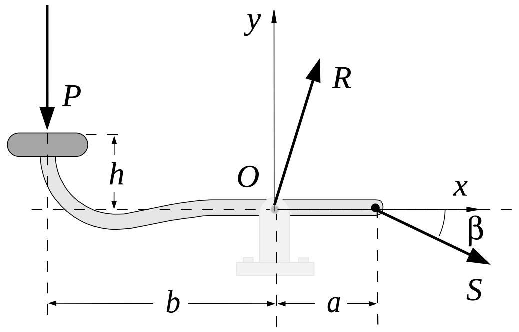
$$\underline{\underline{N_B = \frac{mga - Nh}{a + b}}}$$

och då ges N_A av ekv (2) $N_A = mg - N_B \quad \Rightarrow$

$$N_A = mg - \frac{mga - Nh}{a + b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N_A = \frac{mgb + Nh}{a + b}}}$$

Kommentar:
Om normalkraften $N = 0$ ligger en större del av bilens tyngd på framhjulen om $a < b$. Om $a = b$ är i detta fall normalkrafterna lika stora.
Normalkraften N ökar normalkraften vid bakhjulen och minskar den vid framhjulen. Vid ett visst kraftparsmoment på bakhjulen, dvs ett visst värde på normalkraften N, lättar framhjulen.

LP 3.33



Frilägg kroppen från leden i O. Inför reaktionskraften R. Vi förutsätter att leden O är glatt.

Jämvikt fordrar:

$$\rightarrow: \quad R_x + S\cos\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad -P + R_y - S\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft O: \quad P \cdot b - S\sin\beta \cdot a = 0 \qquad (3)$$

Ekv (3) ger $\quad \underline{\underline{S = \dfrac{b}{a\sin\beta}P}} \qquad (4)$

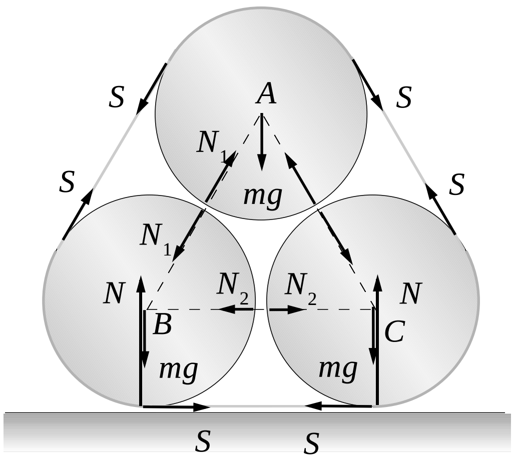
Ekv (1) och (2) ger $\quad R_x = -S\cos\beta \qquad R_y = P + S\sin\beta$

Sätt in detta i (4)! $\quad \Rightarrow \quad R_x = -\dfrac{b}{a\tan\beta}P \qquad R_y = \dfrac{a+b}{a}P \quad \Rightarrow$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = P\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2\tan^2\beta}}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{P}{a}\sqrt{(a+b)^2 + \frac{b^2}{\tan^2\beta}}}}$$

LP 3.38



Frilägg cylindrarna från varandra och från bordet!

Vad händer om spännkraften S är för liten? Jo, de undre cylindrarna förlorar kontakten med varandra. Gränsfallet för detta är när normalkraften $N_2 = 0$.
Det är detta villkor som ger $S_{\min}$.

De spetsiga vinklarna i figuren är antingen 60° eller 30°.

Cylindrarna är glatta så att trådkraften är lika stor i alla delar av tråden. Det ges också om man ställer upp moment-ekvationen med avseende på varje centrum.

Jämvikt fordrar

för den övre cylindern:

$$\uparrow: \quad 2\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 - mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}S = 0 \qquad (1)$$

för den undre vänstra cylindern:

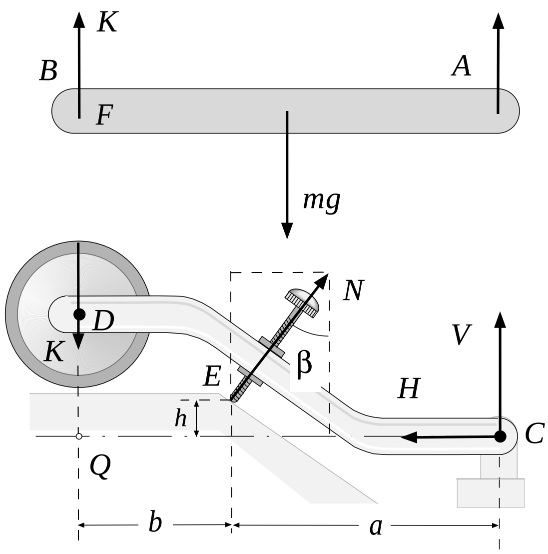
$$\rightarrow: \quad S + \frac{1}{2}S - N_2 - \frac{1}{2}N_1 = 0 \qquad (2)$$

Sätt nu in $N_2 = 0$ i ekv (2) och eliminera N_1 ur ekvationerna genom att först multiplicera (2) med 2, dividera (1) med $\sqrt{3}$ och sedan addera ekvationerna.

Resultatet är

$$\underline{\underline{S_{\min} = \frac{mg}{2\sqrt{3}}}}$$

LP 3.42



Frilägg stången AB och frilägg den undre delen av systemet från kontakten vid E och C. Stången är homogen så att masscentrum ligger mitt på stången.

Alla leder är glatta. Det betyder att det saknas bromsande kraftparsmoment vid dessa axlar. För hjulet betyder det att den horisontella kraften vid kontaktpunkten F är noll. Annars skulle det vara den enda kraften som skulle ge ett kraftmoment med avseende på hjulaxeln D och hjulet skulle inte vara i jämvikt.

Antag att den horisontella och vertikala komponenten av kontaktkraften vid C är H respektive V.

Jämvikt för den frilagda stången AB fordrar:

$$\curvearrowleft A: \quad mg \cdot \frac{1}{2}(a+b) - K \cdot (a+b) = 0 \qquad (1)$$

Jämvikt för den frilagda undre delen av systemet fordrar:

$$\rightarrow: \quad -H + N\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

$$\uparrow: \quad V + N\cos\beta - K = 0 \qquad (3)$$

$$\curvearrowleft C: \quad -N\cos\beta \cdot a - N\sin\beta \cdot h + K \cdot (a+b) = 0 \qquad (4)$$

Kraften AB bestäms direkt med ekv (1):

$$K = \frac{mg}{2} \qquad (5)$$

Kraften N bestäms då av ekv (4):

$$N = \frac{mg(a+b)}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)} \qquad (6)$$

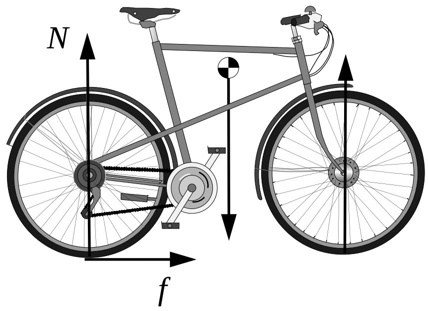
Insättning av (5) och (6) i ekv (2) och (3) ger då H och V:

$$\underline{\underline{H = \frac{(a+b)\sin\beta}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)} mg}}$$

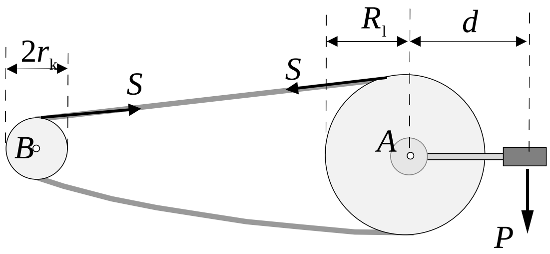
$$V = \frac{mg}{2}\left(1 - \frac{(a+b)\cos\beta}{a\cos\beta + h\sin\beta}\right) \qquad \text{eller} \qquad \underline{\underline{V = \frac{h\sin\beta - b\cos\beta}{2(a\cos\beta + h\sin\beta)} mg}}$$

Om $h\tan\beta = b$ (se figur!) är den vertikala kraften $V = 0$. Det motsvaras av att K, N och H bildar ett strålkraftsystem med skärningspunkt i Q.

LP 3.52



En stel kropp som har konstant translationshastighet, dvs alla punkter i kroppen har lika hastighet, befinner sig i ett jämviktstillstånd. En stel kropp som roterar med konstant vinkelhastighet kring en axel genom masscentrum är också i jämvikt.
Detta gäller även om axeln genom masscentrum har konstant hastighet. Full förståelse för detta får man i dynamiken.



Om bakhjulet friläggs ser man att det påverkas av krafter i centrum, kontaktkraften mot marken samt kraften S på kedjekransen, som ju är stelt förenad med hjulet.

Kedjehjulet med pedaler påverkas förutom av krafter i centrum av kraften S och kraften P på pedalen.

Enda möjligheten att slippa krafterna vid axlarna är att ställa upp momentekvationerna med avseende på dessa axlar.

Jämvikt fordrar:

Bakhjul $\curvearrowleft B$: $\quad f \cdot R - r_k \cdot S = 0 \quad (1)$

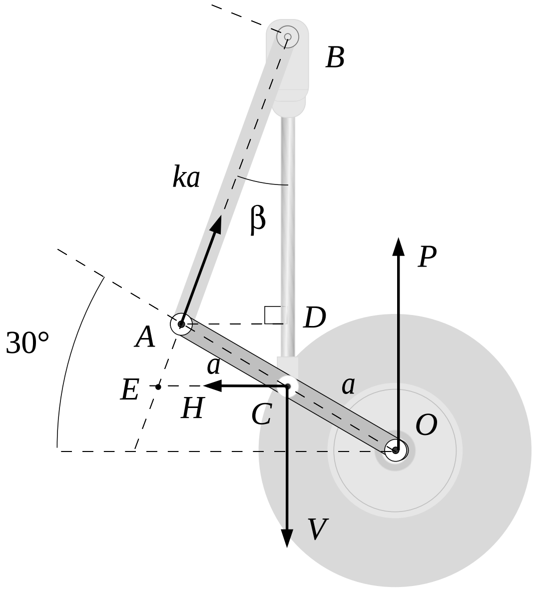
Kedjehjul $\curvearrowleft A$: $\quad S \cdot R_l - d \cdot P = 0 \quad (2)$

Ekv (2) ger $\quad \underline{\underline{S = \dfrac{Pd}{R_l}}}$

Ekv (1) ger då $\quad f = \dfrac{r_k}{R} S \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \dfrac{r_k \cdot d}{R \cdot R_l} P}}$

Eftersom d och R är givna konstanta avstånd kan cykelns framåtdrivande kraft f ändras bara genom utväxlingen, dvs förhållandet r_k / R_l, som kan bestämmas genom att räkna antalet kuggar på de båda hjulen.

LP 3.56



Hjulet påverkas vid kontaktstället mot marken av kraften P uppåt. Jämvikt i vertikal led innebär då att kraften på hjulet vid O är P nedåt. Då har man också försummat hjulets tyngd jämfört med flygplanets.

Frilägg nu stången OA! Eftersom stången AB är lätt, är det en tvåkraftskropp och då måste kraften i leden A vara riktad mot punkten B.
Antag att reaktionskraften i C har komponenterna H och V enligt figuren. Kraftsituationen är då klar eftersom lederna är glatta och tyngden får försummas.

Nu återstår att ur den givna geometrin bestämma hävarmar.

Observera att vinkeln β inte är $30°$, eftersom stängerna OA och AB inte är vinkelräta.

$$|\mathbf{r}_{AC}| = a \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{CD}| = a\sin 30° \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{CD}| = \frac{a}{2} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{AD}| = a\cos 30° \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{AD}| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{2}$$

Med Pythagoras sats för triangeln ABD fås:

$$|\mathbf{r}_{AB}| = a\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BD}| = a\sqrt{7-\frac{3}{4}} = \frac{5a}{2} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{BC}| = 3a \tag{3}$$

Likformighet ger

$$(\tan\beta =) \quad \frac{|\mathbf{r}_{AD}|}{|\mathbf{r}_{BD}|} = \frac{|\mathbf{r}_{EC}|}{|\mathbf{r}_{BC}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{5a}{2}} = \frac{|\mathbf{r}_{EC}|}{3a} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{r}_{EC}| = \frac{3\sqrt{3}}{5}a \tag{4}$$

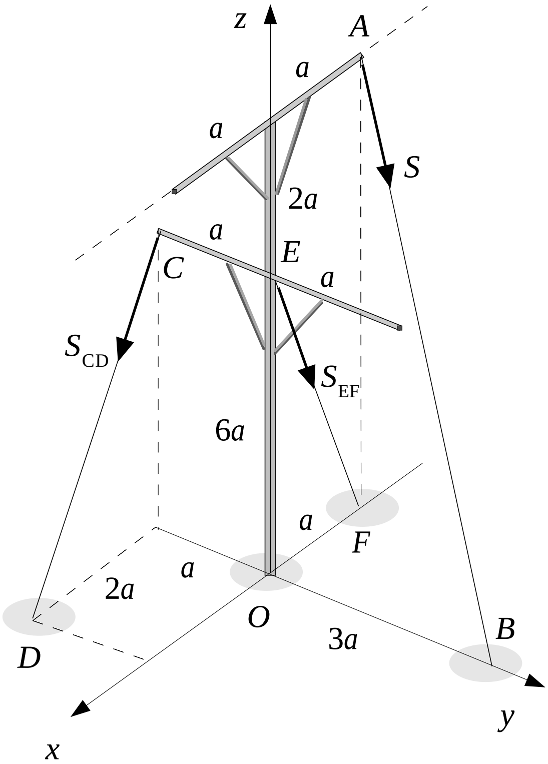
Jämvikt för stången OA fordrar:

$$\curvearrowleft B: \qquad P\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} - H\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{5a}{2}\right) = 0 \tag{5}$$

$$\curvearrowleft E: \qquad P\cdot\left(\frac{3a\sqrt{3}}{5}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) - V\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{5} = 0 \tag{6}$$

Ekv (5) och (6) ger $\qquad \underline{\underline{H = \frac{\sqrt{3}}{6}P}} \qquad \underline{\underline{V = \frac{11}{6}P}}$

LP 3.61



Jämvikt för stolpen fordrar att kraftmomentet $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Stolpen kan inte vrida sig kring z-axeln, eftersom fundamentet kan balansera ett eventuellt kraftmoment i z-riktningen.

De tre trådkrafternas moment med avseende på x- och y- riktningen måste däremot vara noll.

För att kunna beräkna kraftmomenten måste man skriva trådkrafterna på vektorform. Vi börjar därför med att bestämma enhetsvektorerna i trådriktningarna.

Här är

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (0,\ 3a,\ 0) - (-a,\ 0,\ 8a) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (a,\ 3a,\ -8a) \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{(1,\ 3,\ -8)}{|(1,\ 3,\ -8)|} = \frac{(1,\ 3,\ -8)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{74}}(1,\ 3,\ -8) \quad (4)$$

På samma sätt fås

$$\mathbf{r}_{CD} = (2a,\ 0,\ -6a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{CD} = \frac{(1,\ 0,\ -3)}{|(1,\ 0,\ -3)|} = \frac{(1,\ 0,\ -3)}{\sqrt{1+0+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,\ 0,\ -3) \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{EF} = (-a,\ 0,\ -6a) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{EF} = \frac{(-1,\ 0,\ -6)}{|(-1,\ 0,\ -6)|} = \frac{(-1,\ 0,\ -6)}{\sqrt{1+0+36}} = \frac{1}{\sqrt{37}}(-1,\ 0,\ -6) \quad (6)$$

Krafterna på vektorform är alltså

$$\mathbf{S}_{AB} = S\mathbf{e}_{AB} = \frac{S}{\sqrt{74}}(1,\ 3,\ -8) \quad (7)$$

$$\mathbf{S}_{CD} = S_{CD}\mathbf{e}_{CD} = \frac{S_{CD}}{\sqrt{10}}(1,\ 0,\ -3) \quad (8)$$

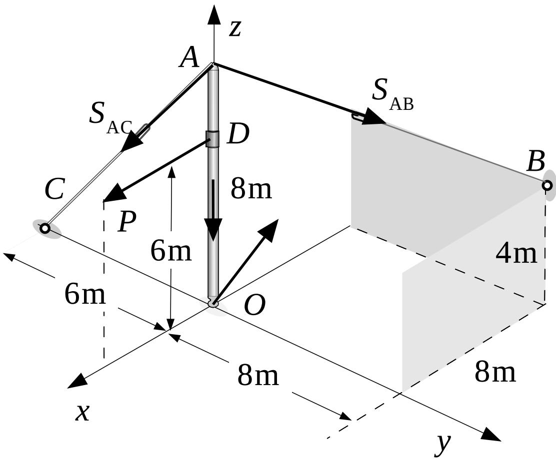
$$\mathbf{S}_{EF} = S_{EF}\mathbf{e}_{EF} = \frac{S_{EF}}{\sqrt{37}}(-1,\ 0,\ -6) \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -8 \end{vmatrix} \frac{aS}{\sqrt{74}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \frac{aS_{CD}}{\sqrt{10}} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} \frac{aS_{EF}}{\sqrt{37}} + \text{kraftmoment från fundament}$$

$$(M_x =) \quad -\frac{24aS}{\sqrt{74}} + \frac{3aS_{CD}}{\sqrt{10}} + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{CD} = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{37}}S$$

$$(M_y =) \quad 0 + \frac{6aS_{CD}}{\sqrt{10}} - \frac{6aS_{EF}}{\sqrt{37}} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{EF} = \frac{8}{\sqrt{2}}S$$

LP 3.65



De yttre krafterna på stolpen är förutom P tyngdkraften mg, trådkrafterna S_{AB} och S_{AC} samt reaktionskraften vid O. Trådkrafterna skall bestämmas. Det motsvarar två obekanta eftersom kraftriktningarna är givna.

Reaktionskraften vid O motsvarar tre obekanta. Enda möjligheten att slippa den kraften i räkningarna är att ställa upp momentekvationen med avseende på O.

Först skriver vi trådkrafterna som vektorer. Vi börjar med att bestämma enhetsvektorerna i deras riktningar.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = \left(-8, 8, -4\right) \text{ m} \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{\left|\mathbf{r}_{AB}\right|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{\left(-2, 2, -1\right)}{\left|\left(-2, 2, -1\right)\right|} = \frac{\left(-2, 2, -1\right)}{\left|\sqrt{4+4+1}\right|} = \frac{1}{3}\left(-2, 2, -1\right) \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = \left(\ 0, -6, -8\right) \text{ m} \quad \Rightarrow \tag{3}$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{\left|\mathbf{r}_{AC}\right|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AC} = \frac{\left(\ 0, -3, -4\right)}{\left|\left(\ 0, -3, -4\right)\right|} = \frac{\left(\ 0, -3, -4\right)}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}\left(\ 0, -3, -4\right) \tag{4}$$

Trådkrafterna skrivna som vektorer är alltså

$$\mathbf{S}_{AB} = S_{AB}\mathbf{e}_{AB} = \frac{S_{AB}}{3}\left(-2, 2, -1\right) \qquad \mathbf{S}_{AC} = S_{AC}\mathbf{e}_{AC} = \frac{S_{AC}}{5}\left(\ 0, -3, -4\right) \tag{5}$$

Jämvikt fordrar: $\quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_A \times \mathbf{S}_{AB} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{S}_{AC} + \mathbf{r}_D \times \mathbf{P} = \mathbf{0} \qquad (6)$

$$\left(\mathbf{M}_O =\right) \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \frac{S_{AB}}{3} \text{ m} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \frac{S_{AC}}{5} \text{ m} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} P \text{ m} = \mathbf{0} \tag{7}$$

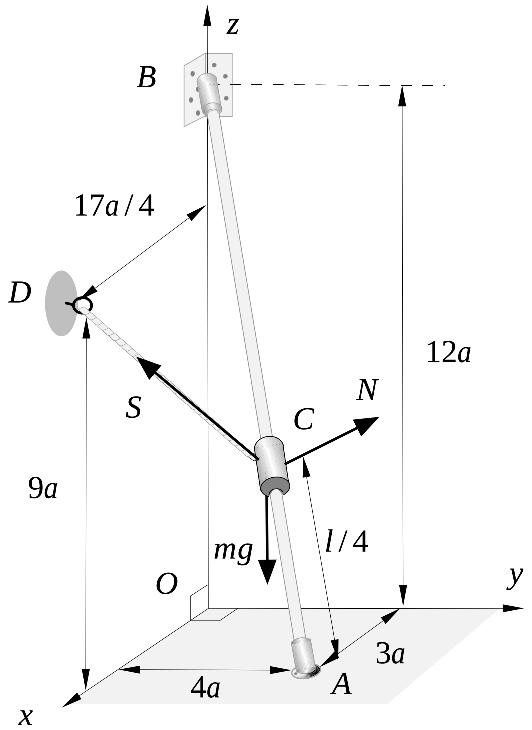
Enheten kan tyckas vara fel men krafterna innehåller enheten N.

$$\left(M_x =\right) \quad -\frac{16S_{AB}}{3} + \frac{24S_{AC}}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{9S_{AC}}{10}$$

$$\left(M_y =\right) \quad -\frac{16S_{AC}}{3} + 6P = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AC} = \frac{9}{8}P \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{81}{80}P$$

Kraften P är given: $P = 8$ kN $\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S_{AB} = \dfrac{81}{10}\ \text{kN}}}; \qquad \underline{\underline{S_{AC} = 9\ \text{kN}}}$

LP 3.67



De yttre krafterna på hylsan, som får antas vara liten, är tyngdkraften mg, trådkraften S samt normalkraften N. Tyngdkraften och trådkraften har givna riktningar. Normalkraftens riktning är delvis känd. Den är ju vinkelrät mot stången. Trådkraften skall bestämmas. Eftersom hylsan antas vara liten har krafterna samma angreppspunkt och momentekvationen är då redan satisfierad.

Går det att skriva upp en jämviktsekvation utan att normalkraften kommer med? Ja, kraftekvationen projicerad på stångens riktning skulle kunna ge resultatet. Vi måste då först bestämma enhetsvektorn i stångens riktning samt krafterna som vektorer.

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (0,\, 0,\, 12a) - (3a,\, 4a,\, 0) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{AB} = (-3a,\, -4a,\, 12a) \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3a,\, -4a,\, 12a)}{|(-3a,\, -4a,\, 12a)|} \quad \Rightarrow \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{(-3,\, -4,\, 12)}{|(-3,\, -4,\, 12)|} = \frac{(-3,\, -4,\, 12)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) \tag{3}$$

Trådkraftens riktning fås på samma sätt. Vi bestämmer först enhetsvektorn $\mathbf{e}_{CD}$.

$$\mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{CD} = \left(\frac{17a}{4},\, 0,\, 9a\right) - \left(\frac{9a}{4},\, 3a,\, 3a\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{CD} = (2a,\, -3a,\, 6a) \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{\mathbf{r}_{CD}}{|\mathbf{r}_{CD}|} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{CD} = \frac{(2a,\, -3a,\, 6a)}{|(2a,\, -3a,\, 6a)|} \quad \Rightarrow \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_{CD} = \frac{(2,\, -3,\, 6)}{|(2,\, -3,\, 6)|} = \frac{(2,\, -3,\, 6)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{7}(2,\, -3,\, 6) \quad \Rightarrow \tag{6}$$

$$\mathbf{S} = S\mathbf{e}_{CD} = \frac{S}{7}(2,\, -3,\, 6) \tag{7}$$

Jämvikt fordrar: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{AB} + (-mg\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_{AB} = \mathbf{0}$

$$\frac{S}{7}(2,\, -3,\, 6) \cdot \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) + (0,\, 0,\, -mg) \cdot \frac{1}{13}(-3,\, -4,\, 12) = 0$$

$$\frac{S}{13 \cdot 7}(-6 + 12 + 72) - \frac{12}{13}mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = \frac{42}{39}mg}}$$