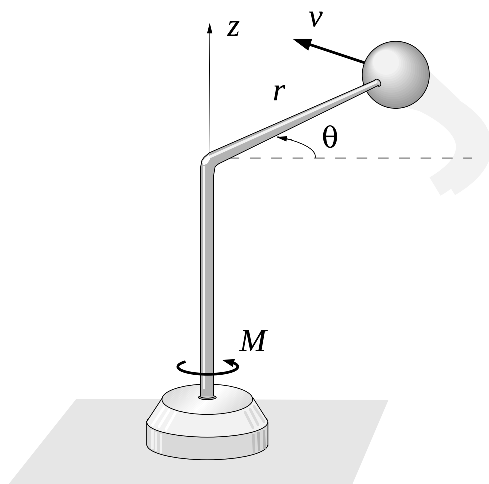
LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 10

LP 10.1



Kulan och stången påverkas förutom av det givna kraftparsmomentet M av tyngdkraften, en reaktionskraft och ett kraftmoment vid axeln. Varken tyngdkraften eller reaktionskraften ger något kraftmoment med avseende på z-axeln. Momentekvationens z-komponent ger då om cylinderkoordinater används

$$M_z = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow$$

Rörelsemängdsmomentet H_z beräknas som hävarm gånger rörelsemängd. Farten är $v = r\dot{\theta}$.

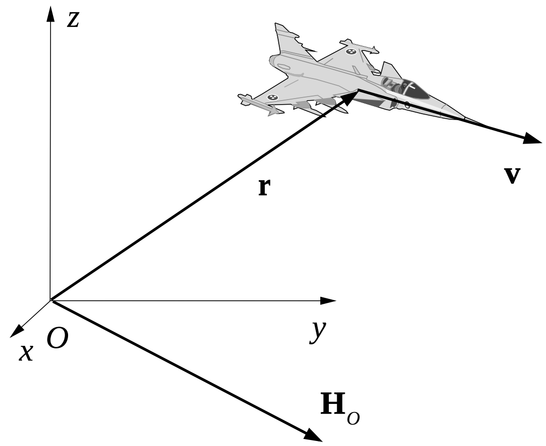
$$M = \frac{d}{dt}\left(r \cdot mr\dot{\theta}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$M = mr^2\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{mr^2}$$

Nämnaren står för kulans tröghet mot ändring av vinkelhastigheten.

LP 10.2



Definitionen av rörelsemängdsmomentet är

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad \Rightarrow$$

Här är

$$\mathbf{r} = 200\,(2,\ 3,\ 4)\ \mathrm{m}$$

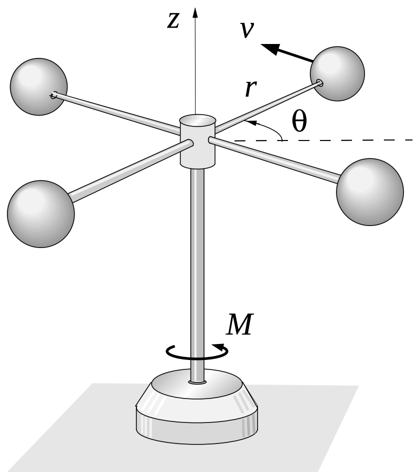
$$\mathbf{v} = 30\,(1,\ 4,\ -2)\ \mathrm{m/s}$$

Kryssprodukten beräknas med en determinant:

$$\mathbf{H}_O = 10 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 30 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \mathrm{kgm^2/s}$$

$$= 60 \cdot 10^6 \left(-22,\ 8,\ 5\right) \mathrm{kgm^2/s}$$

LP 10.3



Hela systemet bestående av kulorna och stängerna påverkas förutom av det givna kraftparsmomentet M av den totala tyngdkraften längs z-axeln samt en reaktionskraft uppåt också längs z-axeln. Varken tyngdkraften eller reaktionskraften ger något kraftmoment med avseende på z-axeln.

Momentekvationens z-komponent ger då om cylinderkoordinater används

$$M_z = \dot{H}_z \qquad \Rightarrow$$

Rörelsemängdsmomentet H_z beräknas som hävarm gånger rörelsemängd. Farten är $v = r\dot{\theta}$

$$H_z = 4 \cdot r \cdot mv \qquad \Rightarrow$$

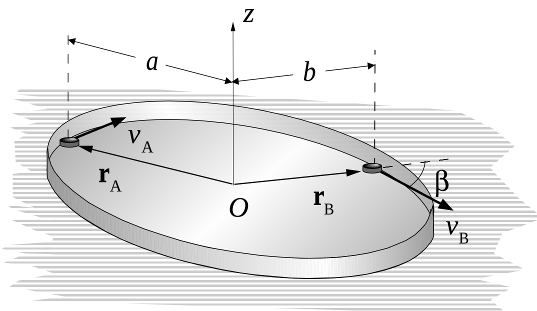
$$M = \frac{d}{dt}\left(4 \cdot r \cdot mr\dot{\theta}\right) \qquad \Rightarrow$$

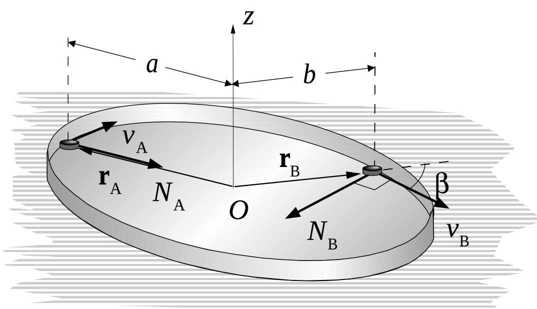
$$M = 4mr^2\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\ddot{\theta} = \frac{M}{4mr^2}}}$$

Nämnaren står för systemets tröghet mot ändring av vinkelhastigheten.

LP 10.4





Rörelsemängdsmomentet är

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

I läge A är lägevektorn vinkelrät mot rörelsemängden så att

$$(H_z)^A = -a \cdot mv_A$$

Minustecknet följer av högerregeln.

I läge B är det bara den komposant av rörelsemängden som är vinkelrät mot lägevektorn som bidrar:

$$(H_z)^B = -b \cdot mv_B \sin\beta$$

Eftersom dessa uttryck på rörelse-mängdsmomentet bara gäller vid två speciella lägen (speciella tidpunkter) går det inte att tidsderivera för att få de sökta tidsderivatorna.

Vi vet dock att enligt momentekvationen är $M_z = \dot{H}_z$ så att om vi söker $\dot{H}_z$ kan vi i stället bestämma kraftmomentet M_z. Vilka är krafterna på pucken?

Pucken påverkas av tyngdkraften, en normalkraft uppåt och en normalkraft N inåt, vinkelrätt mot sargen. Den senare är den enda som kan ge ett kraftmoment i z-riktningen.

I läge A har normalkraften N_A en riktning som sammanfaller med lägevektorn. Den kan då inte ge något kraftmoment.

$$(\dot{H}_z)^A \;\; (= M_z)^A = 0$$

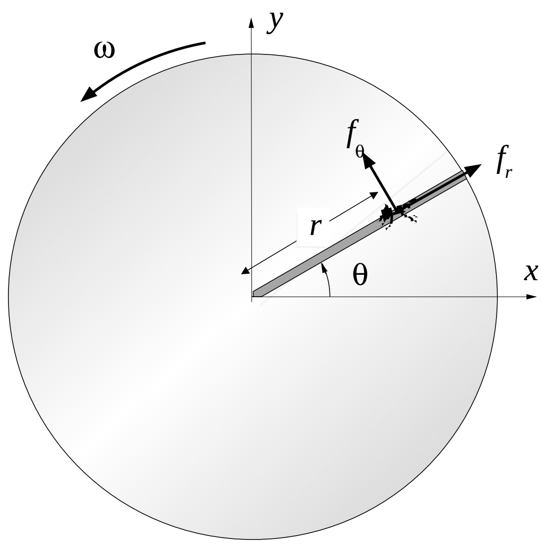
I läge B ges normalkraften N_B av kraftekvationens komponent i normalriktningen (naturliga koordinatsystemet):

$$m\frac{v_B^{\,2}}{R} = N_B$$

Bara den del av normalkraften som är vinkelrät mot lägevektorn bidrar till kraft-momentet:

$$(\dot{H}_z)^B \;\; (= M_z)^B = -b \cdot N_B \cos\beta = -b\frac{mv_B^{\,2}}{R}\cos\beta$$

LP 10.7



Myran påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och friktionskraften f. Dela upp friktionskraften i komponenter enligt figuren. Då tyngdkraften och normalkraften är vinkelräta mot rörelsens plan är de lika stora och kan inte påverka skivans rörelse.

Myran har en hastighet v utåt i spåret men också en hastighet $v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$ för att den följer skivans rotation. Rörelsemängdsmomentet för myran med avseende på z-axeln är

$$H_z = r \cdot mv_\theta = mr^2\dot{\theta} \tag{1}$$

Momentekvationen för enbart myran med avseende på z-axeln

$$M_z = \dot{H}_z \tag{2}$$

ger

$$r \cdot f_\theta = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) \tag{3}$$

$$r \cdot f_\theta = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\omega\right) \tag{4}$$

Vinkelhastigheten är konstant men avståndet r ändras enligt $\dot{r} = v$

$$r\, f_\theta = 2mr\dot{r}\omega \tag{5}$$

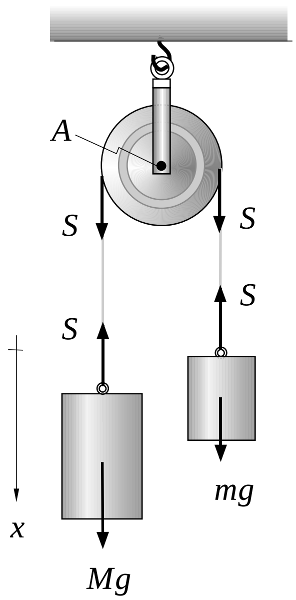
$$r\, f_\theta = 2mrv\omega \tag{6}$$

Friktionskraften f_θ (men med motsatt riktning) verkar också enligt Newtons tredje lag på skivan. Det är den som bromsar skivans rörelse. Den ger ett bromsande kraftmoment på skivan. Om det bromsande kraftmomentet neutraliseras med en motor skall motorn ge kraftparsmomentet

$$M_z = r\, f_\theta = 2mrv\omega \tag{7}$$

Svar: Kraftparsmomentet skall vara $\underline{\underline{M_z = 2mrv\omega}}$

LP 10.8



Vikterna friläggs. Varje vikt påverkas av tyngdkraften och trådkraften S. Eftersom trissan är lätt och lättrörlig måste trådkraften vara lika på båda sidor. Detta följer om man ställer upp momentekvationen *för trissan* med avseende på centrumaxeln A (z-axeln). Antag att trissans radie är r och att krafterna på båda sidor är olika!

$$M_z = \dot{H}_z$$

$$M_z = I_z\ddot{\theta}$$

$$r(S_1 - S_2) - M_f = I_z\ddot{\theta}$$

Men om trissan är lätt så är tröghets-momentet $I_z = 0$. Om den dessutom är lättrörlig så är kraftparsmomentet på grund av friktionen noll, $M_f = 0$. Det betyder att

$$r(S_1 - S_2) - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2$$

Rörelsen startar från vila. Antag att den vänstra vikten får en hastighet $\dot{x}$ nedåt. Om tråden är otänjbar får den högra vikten hastigheten $\dot{x}$ uppåt. Vi börjar med att ställa upp momentekvationen *för hela systemet* med avseende på centrum-axeln A (z-axeln). Trådkrafterna är då inre krafter och kommer inte med

$$M_z = \dot{H}_z$$

$$Mg \cdot r - mg \cdot r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[r\left(M\dot{x} + m\dot{x}\right)\right]$$

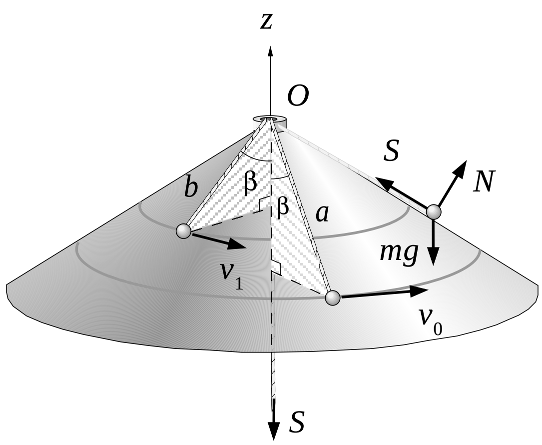
Varje vikt har en rörelsemängd. Hävarmen r är lika till dessa rörelsemängder. Den vänstra vikten har en rörelsemängd neråt, den högra vikten har en rörelse-mängd uppåt. De ger båda ett positivt bidrag till rörelsemängdsmomentet, om det räknas positivt moturs.

Tidsintegreras momentekvationen får man impulsmomentlagen:

$$(M - m)gr \cdot t = r(M + m)\dot{x}$$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \frac{(M - m)g}{(M + m)}t}}$$

LP 10.10



Kulan påverkas av tyngdkraften mg, normalkraften N och trådkraften S. Trådkraften S varierar men den är hela tiden riktad mot en och samma fixa punkt, origo O. Den ger då inget kraftmoment med avseende på origo. Tyngdkraften är parallell med z-axeln och kan inte ge något kraftmoment med avseende på z-axeln. Normalkraftens verkningslinje skär z-axeln och kan därför inte heller ge något kraftmoment med avseende på z-axeln.

a) Momentekvationen med avseende på z-axeln

$$M_z = \dot{H}_z$$

$$0 = \dot{H}_z$$

$$H_z = \text{konstant}$$

Rörelsemängdsmomentet med avseende på z-axeln är alltså en rörelsekonstant. Rörelsemängdsmomentet är lika i de två nämnda lägena:

$$a\sin\beta \cdot mv_0 = b\sin\beta \cdot mv_1 \qquad (1)$$

Denna ekvation ger alltså farten v_1

$$v_1 = \frac{a}{b}v_0 \qquad (2)$$

b) En krafts arbete kan bestämmas på flera olika sätt. Trådkraften är inte känd på förhand. Normalkraften inget arbete eftersom den är vinkelrät mot hastigheten. Tyngdkraftens arbete bestäms enkelt som kraften gånger förflyttningen i denna riktning:

$$U_{mg} = -mg \cdot (a\cos\beta - b\cos\beta)$$

Lagen om kinetiska energin ger då trådkraftens arbete U_S

$$U = T_1 - T_0$$

Insättning ger

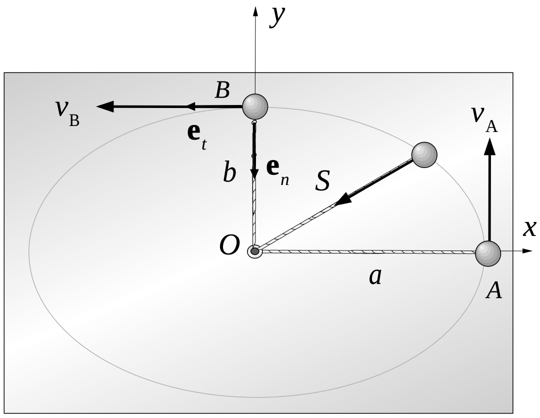
$$U_S + U_{mg} = \frac{1}{2}mv_1{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

Ekv (2) och (3) ger

$$U_S - mg \cdot (a\cos\beta - b\cos\beta) = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{b^2}v_0{}^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$U_S = mg(a-b)\cos\beta + \frac{1}{2}m\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)v_0{}^2$$

LP 10.11



Kulan påverkas av tyngdkraften, normalkraften och trådkraften S. Då tyngdkraften och normalkraften är vinkelräta mot rörelsens plan är de lika stora och kommer inte med i analysen.

Trådkraften varierar men den är hela tiden riktad mot en och samma fixa punkt, origo O. Den ger då inget kraftmoment med avseende på origo. Momentekvationen med avseende på z-axeln

$$M_z = \dot{H}_z$$

$$0 = \dot{H}_z$$

$$H_z = \text{konstant}$$

Rörelsemängdsmomentet är alltså en rörelsekonstant. Rörelsemängdsmomentet är lika i A och B:

$$a \cdot mv_A = b \cdot mv_B \qquad (1)$$

Denna ekvation ger alltså farten i B:

$$v_B = \frac{a}{b} v_A \qquad (2)$$

Trådkraften i B ges av kraftekvationens komponent i normalriktningen:

$$\mathbf{e}_n: \qquad m\frac{{v_B}^2}{\rho_B} = S \qquad (3)$$

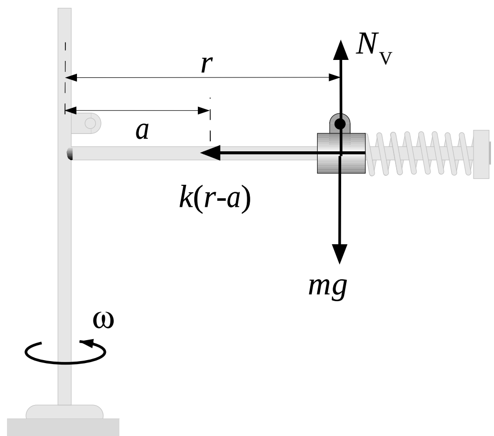
Krökningsradien i B är given i problemtexten

$$m\frac{b{v_B}^2}{a^2} = S \qquad (4)$$

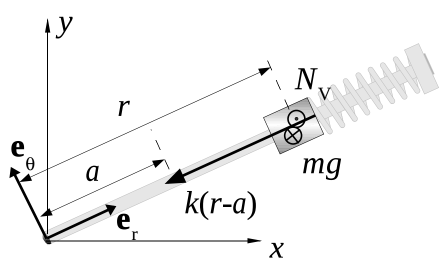
Farten $v_B = \frac{a}{b} v_A$ ges av ekv (2).

Resultatet är alltså att trådkraften i B är $\underline{\underline{S = \frac{m{v_A}^2}{b}}}$

LP 10.16



Uppifrån:



Hela stativet är lätt jämfört med hylsans massa m. Stativet roterar helt fritt utan vare sig drivning eller friktion. Vad kan man förvänta sig hända? Att hylsan åker utåt längs stången stämmer väl med de flestas intuition. Efter ett tag blir fjäderkraften så stor att hylsan vänder inåt.

Det kan också vara rimligt att anta att vinkelhastigheten ändras, då det inte finns någon drivning som kan hålla den konstant. Krafterna på hylsan är tyngdkraften mg, en vertikal normalkraft N_V samt fjäderkraften $k(r-a)$. Observera att det inte finns någon horisontell normalkraft.

Momentekvationens vertikala komponent

$$M_z = \dot{H}_z \tag{1}$$

ger
$$0 = \dot{H}_z \quad \Rightarrow \tag{2}$$

$$\boxed{H_z = \text{konstant}} \tag{3}$$

Rörelsemängdsmomentet är alltså lika i de båda lägena:

$$mb^2\omega_1 = ma^2\omega_0 \tag{4}$$

Den enda kraft som gör arbete är fjäderkraften. De andra är vinkelräta mot hastigheten. Den mekaniska energin är då också en rörelsekonstant.

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_0 + V_1} \tag{5}$$

Insättning ger

$$\frac{1}{2}m(b\omega_1)^2 + \frac{1}{2}k(b-a)^2 = \frac{1}{2}m(a\omega_0)^2 + 0 \tag{6}$$

Utnyttja ekv (4)
$$mb^2\left(\frac{a^2}{b^2}\omega_0\right)^2 + k(b-a)^2 = m(a\omega_0)^2 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad k(b-a)^2 = ma^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\omega_0{}^2 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad k(b-a)^2 = ma^2\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)\omega_0{}^2 \tag{9}$$

Vi ser en gemensam faktor $b-a$

$$\Rightarrow \quad kb^2(b-a) = ma^2(b+a)\omega_0{}^2 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{k = \frac{a^2(b+a)}{b^2(b-a)}m\omega_0{}^2}}$$