# LÖSNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 1

**LP 1.1** Acceleration är hastighetsändring per tid:

$$\dim g = \dim \frac{\text{hastighet}}{\text{tid}} = \frac{\mathrm{LT^{-1}}}{\mathrm{T}} = \mathrm{LT^{-2}}$$
$$\dim R = \mathrm{L}$$
$$\dim \tau = \mathrm{T}$$

**a)** $$\dim 2\pi\sqrt{gR} = \dim 2\pi \cdot \dim \sqrt{gR} = 1 \cdot (\dim gR)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (\dim g \cdot \dim R)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{LT^{-2}} \cdot \mathrm{L})^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{L^2T^{-2}})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{LT^{-1}}$$

**b)** $$\dim 2\pi R\sqrt{g} = \dim 2\pi \cdot \dim R \cdot \dim(\sqrt{g}) = 1 \cdot \mathrm{L} \cdot (\dim g)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \mathrm{L} \cdot (\mathrm{LT^{-2}})^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{L^3T^{-2}})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{T^{-1}}$$

**c)** $$\dim 2\pi\sqrt{\frac{g}{R}} = \dim 2\pi \cdot \dim \sqrt{\frac{g}{R}} = 1 \cdot \left(\dim \frac{g}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\dim g}{\dim R}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathrm{LT^{-2}}}{\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{T^{-2}})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{T^{-1}}$$

**d)** $$\dim 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \dim 2\pi \cdot \dim \sqrt{\frac{R}{g}} = 1 \cdot \left(\dim \frac{R}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\dim R}{\dim g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{LT^{-2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{T^{2}})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{T}$$

Uttrycket i d) har alltså dimensionen tid och kan vara rätt uttryck för satellitens omloppstid.

En helt annan kontroll gäller *storleksordningen*:

Om jordens omkrets är ungefär 4000 mil och tyngdaccelerationen sätts till 10 $\mathrm{m/s^2}$ så fås

$$2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{(2\pi)^2 \frac{\text{Omkrets}}{g \cdot 2\pi}} \approx \sqrt{\frac{2\pi \cdot 40000000}{10}}\ \mathrm{s} \approx \sqrt{24000000}\ \mathrm{s} \approx 5000\ \mathrm{s} \approx 1.4\ \mathrm{h}$$

Det är ett rimligt värde för en satellit vars hastighet är av storleksordningen 10 km/s.

**LP 1.2** Termerna i en ekvation måste ha samma dimension. Vi kontrollerar därför varje term:

$$\dim \frac{1}{2} m v^2 = \dim m \cdot (\dim v)^2 = \mathrm{M} \cdot \left(\mathrm{LT}^{-1}\right)^2 = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$
$$\dim mgx = \dim m \cdot \dim g \cdot \dim x = \mathrm{M} \cdot \mathrm{LT}^{-2} \cdot \mathrm{L} = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$$
$$\dim \frac{1}{2} kx = \dim k \cdot \dim x = \dim\left(\frac{\text{kraft}}{\text{längd}}\right) \cdot \dim(\text{längd})$$
$$= \dim(\text{kraft}) = \dim(\text{massa} \cdot \text{acceleration}) = \mathrm{MLT}^{-2}$$

De två första termerna har samma dimension. De motsvarar egentligen kinetisk energi respektive potentiell energi. Den tredje termen har en annan dimension och kan ej adderas till de andra.

**LP 1.3** Vi bestämmer dimensionen för de storheter som ingår i formlerna och sedan undersöker vi varje given formels dimension.

$$\dim P = \dim(\text{effekt}) = \dim(\text{kraft}) \cdot \dim(\text{hastighet})$$
$$= \dim(\text{massa} \cdot \text{acceleration}) \cdot \dim(\text{hastighet})$$
$$= \mathrm{MLT}^{-2} \cdot \mathrm{LT}^{-1} = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}$$
$$\dim \rho = \dim(\text{densitet}) = \dim(\text{massa per volym}) = \mathrm{ML}^{-3}$$

**a)** $\dim C(\rho P A)^2 = 1 \cdot \left(\mathrm{ML}^{-3} \cdot \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{L}^2\right)^2 = \mathrm{M}^4\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-6}$

**b)** $\dim C(\rho P A) = 1 \cdot \mathrm{ML}^{-3} \cdot \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3} \cdot \mathrm{L}^2 = \mathrm{M}^2\mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-3}$

**c)** $\dim C\left(\rho P A^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{ML}^{-3} \cdot \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}}{\mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{M}^{\frac{2}{3}}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$

**d)** $\dim C\left(\rho^{-1} P A^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot \left(\dfrac{\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-3}}{\mathrm{ML}^{-3} \cdot \mathrm{L}^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{L}^1\mathrm{T}^{-1}$

Endast uttrycket d) har samma dimension som hastighet.

**LP 1.4** Dimensionen för (tyngd-)acceleration är

$$\dim g = \dim\left(\text{hastighetsändring per tid}\right) = \mathrm{LT^{-2}}$$

**a)** $\dim\left(gd\right)^2 = \left(\mathrm{LT^{-2}} \cdot \mathrm{L}\right)^2 = \mathrm{L^2T^{-4}}$

**b)** $\dim\left(g\sqrt{d}\right) = \mathrm{LT^{-2}} \cdot \mathrm{L}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{T^{-2}}$

**c)** $\dim\left(\sqrt{gd}\right) = \left(\mathrm{LT^{-2}} \cdot \mathrm{L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{L^2T^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{L^1T^{-1}}$

Endast uttrycket c) har samma dimension som hastighet.

**LP 1.5** Vi gör en

Ansats: $v = c \cdot m^x \cdot g^y \cdot h^z$ (1)

Dimensionsekvationen blir

$$\dim v = 1 \cdot \dim(\text{massa})^x \cdot \dim(\text{acceleration})^y \cdot \dim(\text{längd})^z$$

eller $\mathrm{LT^{-1}} = \mathrm{M}^x\left(\mathrm{LT^{-2}}\right)^y \mathrm{L}^z$ (2)

$\Rightarrow$ $\mathrm{LT^{-1}} = \mathrm{M}^x\mathrm{L}^{y+z}\mathrm{T}^{-2y}$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \text{M:} &\quad 0 = x \\ \text{L:} &\quad 1 = y + z \\ \text{T:} &\quad -1 = -2y \end{aligned} \qquad (3)$$

Lösningen är $x = 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$

Insättning i ansatsen ger då

$v = c \cdot m^0 \cdot g^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}$ (4)

eller $v = c\sqrt{gh}$

Den dimensionslösa konstanten $c$ kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Det rätta uttrycket för sluthastigheten är $v = \sqrt{2gh}$ och kan bestämmas med en energibetraktelse.

**LP 1.6** Vi gör en

Ansats: $$f = c \cdot l^x \cdot \rho^y \cdot S^z \tag{1}$$

där $f$ är strängens frekvens och $c$ en dimensionslös konstant.

Motsvarande dimensionsekvationen blir

$$\dim(\text{antal per tid}) = 1 \cdot \dim(\text{längd})^x \cdot \dim(\text{massa per längd})^y \cdot \dim(\text{kraft})^z \tag{2}$$

Antal har dimensionen 1.

$$\dim\left(\text{tid}^{-1}\right) = \left[\dim\left(\text{längd}\right)\right]^x \cdot \left[\dim\left(\text{massa per längd}\right)\right]^y \cdot \left[\dim\left(\text{massa} \cdot \text{acceleration}\right)\right]^z \tag{3}$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{L}^x \cdot \left[\mathrm{ML}^{-1}\right]^y \cdot \left[\mathrm{MLT}^{-2}\right]^z \tag{4}$$

$$\mathrm{T}^{-1} = \mathrm{M}^{y+z}\mathrm{L}^{x-y+z}\mathrm{T}^{-2z} \tag{5}$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{array}{ll} \text{M:} & 0 = y + z \\ \text{L:} & 0 = x - y + z \\ \text{T:} & -1 = -2z \end{array} \tag{6}$$

Lösningen är $z = 1/2, \quad y = -1/2, \quad x = -1$

Insättning i ansatsen ger då

$$f = c \cdot l^{-1} \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot S^{\frac{1}{2}}$$

eller $$\underline{\underline{f = \frac{c}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}}}$$

Den dimensionslösa konstanten $c$ kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Resultatet visar att om strängens längd halveras för dubblas frekvensen. Frekvensen ökar med spännkraften och minskar med längddensiteten.

**LP 1.7** Vi gör en

Ansats: $$V_{\text{pot}} = c \cdot k^x \cdot x^y \qquad (1)$$

där $V_{\text{pot}}$ är den potentiella energin i fjädern och $c$ en dimensionslös konstant. Dimensionsekvationen blir

$$\dim(\text{energi}) = 1 \cdot \dim\left(\frac{\text{kraft}}{\text{längd}}\right)^x \cdot \dim(\text{längd})^y \qquad (2)$$

Dimensionen för energi kan bestämmas om man kan en formel för ett annat energiuttryck, t ex kinetisk energi

$$\dim\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \left[\dim\left(\frac{\text{massa} \cdot \text{acceleration}}{\text{längd}}\right)\right]^x \cdot \left[\dim(\text{längd})\right]^y \qquad (3)$$

$$\dim m \cdot (\dim v)^2 = \left(\frac{\text{M} \cdot \text{LT}^{-2}}{\text{L}}\right)^x \cdot \text{L}^y \qquad (4)$$

$$\text{M}\left(\text{LT}^{-1}\right)^2 = \left(\text{MT}^{-2}\right)^x \cdot \text{L}^y \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \qquad \text{ML}^2\text{T}^{-2} = \text{M}^x\text{L}^y\text{T}^{-2x} \qquad (6)$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \text{M:}&\quad 1 = x \\ \text{L:}&\quad 2 = y \\ \text{T:}&\quad -2 = -2x \end{aligned} \qquad (7)$$

Lösningen är $x = 1, \quad y = 2$

Insättning i ansatsen ger då

$$V_{\text{pot}} = c \cdot kx^2 \qquad (8)$$

Den dimensionslösa konstanten $c$ kan vi inte bestämma med denna metod.

Kommentar: Det rätta uttrycket för energin är $V_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$ och kommer att härledas senare.

**LP 1.8** Vi gör en

Ansats: $$\eta = c \cdot E^x \cdot u^y \cdot q^z \cdot g^v \tag{1}$$

där $\eta$ är den inre verkningsgraden och $c$ en dimensionslös konstant. Verkningsgrad är ett förhållande mellan nyttig effekt och tillförd effekt. Verkningsgrad har därför dimensionen 1. Dimensionsekvationen blir

$$1 = 1 \cdot \dim(\frac{\text{energi}}{\text{massa}})^x \cdot \dim(\text{fart})^y \cdot \dim(\frac{\text{massa}}{\text{tid}})^z \cdot \dim(\text{acceleration})^w \tag{2}$$

Dimensionen för energi kan bestämmas om man kan en formel för ett annat energiuttryck, t ex kinetisk energi $T = \frac{1}{2}mv^2$.

$$1 = \left[\dim\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]^x \cdot \left[\dim v\right]^y \cdot \left[\dim\left(\frac{\text{massa}}{\text{tid}}\right)\right]^z \cdot \left[\dim(\text{acceleration})\right]^w \tag{3}$$

$$1 = \left[\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}\right]^x \cdot \left[\mathrm{L}\mathrm{T}^{-1}\right]^y \cdot \left[\mathrm{M}\mathrm{T}^{-1}\right]^z \cdot \left[\mathrm{L}\mathrm{T}^{-2}\right]^w \tag{4}$$

$$1 = \mathrm{M}^z\mathrm{L}^{2x+y+w}\mathrm{T}^{-2x-y-z-2w} \tag{5}$$

Nu måste dimensionen vara lika på båda sidor. Exponenterna för M, L och T måste vara lika. Villkoret för rätt dimension är

$$\begin{aligned} \text{M:} \quad & 0 = z \\ \text{L:} \quad & 0 = 2x + y + w \\ \text{T:} \quad & 0 = -2x - y - z - 2w \end{aligned} \tag{6}$$

Lösningen är $z = 0, \quad w = 0, \quad y = -2x$

Insättning i ansatsen ger då

$$\eta = c \cdot E^x \cdot u^{-2x} \tag{7}$$

Det går inte att bestämma $x$. Det betyder att alla funktioner av förhållandet $\frac{E}{u^2}$ är tillåtna. Resultatet är alltså att uttrycket för verkningsgraden, bestämt med dimensionsanalys) kan skrivas

$$\underline{\underline{\eta = f\left(\frac{E}{u^2}\right)}}$$

Den dimensionslösa konstanten $c$ kan inte bestämmas med den här metoden.