LEDNINGAR TILL PROBLEM I KAPITEL 3

Obs! Till en fullst ndig l sning kr vs en figur!

LP 3.1 Tröghetsmomentets definition för ett partikelsystem ger (partiklarnas bidrag från vänster räknat i figuren)

$$I_x = \sum m_k r_{k\perp}{}^2 = \sum m_k \left(y_k{}^2 + z_k{}^2\right) = mb^2 + mb^2 + mb^2 = 3mb^2$$
$$I_y = \sum m_k r_{k\perp}{}^2 = \sum m_k \left(x_k{}^2 + z_k{}^2\right) = mb^2 + mb^2 + mb^2 = 3mb^2$$
$$I_z = \sum m_k r_{k\perp}{}^2 = \sum m_k \left(x_k{}^2 + y_k{}^2\right) = m\left(b^2 + b^2\right) + 0 + m\left(b^2 + b^2\right) = 4mb^2$$

LP 3.2 Tröghetsmomentet för en homogen stång med massan m och längden l är med avseende på en axel genom ändpunkten respektive mittpunkten

$$\frac{ml^2}{3} \text{ och } \frac{ml^2}{12}$$

Denna beräkning finns i teorin och redovisas inte här.
Tröghetsmomentet är additivt så att det totala tröghetsmomentet är lika med summan av delkropparnas tröghetsmoment.
Stängerna har vardera massan $m/2$.
Om Steiners sats används för den horisontella stången fås

$$I_A = \frac{(m/2)(2b)^2}{3} + \left[\frac{(m/2)(2b)^2}{12} + (m/2)(2b)^2\right]$$

$$I_A = \frac{2}{3}mb^2 + \left[\frac{1}{6} + 2\right]mb^2 = \frac{17}{6}mb^2$$

LP 3.3 För en homogen stång med massan m och längden b är tröghetsmomentet med avseende på en axel vinkelrät mot stången och genom dess mittpunkt (masscentrum G):

$$I_G = \frac{mb^2}{12}$$

Denna beräkning redovisas i teorin. Steiners sats ger tröghetsmomentet med avseende på en ändpunkt A:

$$I_A = I_G + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{12} + \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{3}$$

Den givna kroppen består av tre stänger. Bidragen till tröghetsmomenten i följande uttryck räknas med ordning nerifrån och upp.

$$I_x = 0 + \frac{(m/3)b^2}{3} + \left[\frac{(m/3)b^2}{12} + \frac{m}{3}\left(\frac{b^2}{4} + b^2\right)\right] = \frac{5mb^2}{9}$$

$$I_y = \frac{(m/3)b^2}{3} + \frac{(m/3)b^2}{3} + (m/3)b^2 = \frac{5mb^2}{9}$$

$$I_z = \frac{(m/3)b^2}{3} + 0 + \frac{(m/3)b^2}{3} = \frac{2mb^2}{9}$$

Här har Steiners sats använts för beräkning av I_x. Detta är markerat med en klammer.

LP 3.8 Tröghetsmomentet med avseende på symmetriaxeln för en homogen cirkelskiva eller cylinder med radien R och massan m är

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$

Denna beräkning finns i bokens teoriavsnitt och redovisas inte här. Tröghetsmomentet är additivt så att det totala tröghetsmomentet är lika med summan av delkropparnas tröghetsmoment. Kalla hålet för kropp 1 och återstoden, dvs den betraktade kroppen, för kropp 2! Då gäller om densiteten är ρ och cylinderns höjd är h:

$$m_1 = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h \qquad m_2 = \rho \cdot \pi\left(R^2 - r^2\right) \cdot h \qquad m_{tot} = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{tot}R^2}{2} = \frac{m_1 r^2}{2} + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{m_{tot}R^2}{2} - \frac{m_1 r^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = \frac{\left(\rho \cdot \pi R^2 \cdot h\right)R^2}{2} - \frac{\left(\rho \cdot \pi r^2 \cdot h\right)r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\rho \pi h}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$

Densiteten kan bestämmas eftersom massan och volymen för den givna kroppen är kända:

$$\rho = \frac{m_2}{\pi\left(R^2 - r^2\right)h}$$

Eftersom massan $m_2 \equiv m$ är given i texten ger insättning

$$I_2 = \frac{m}{\pi\left(R^2 - r^2\right)h} \cdot \frac{\pi h}{2}\left(R^4 - r^4\right) \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{m\left(R^4 - r^4\right)}{2\left(R^2 - r^2\right)} \quad \Rightarrow$$

$$I_2 = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)\left(R^2 - r^2\right)}{2\left(R^2 - r^2\right)} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{2}$$

LP 3.10 Skiva upp cylindern i tunna cirkelskivor! Betrakta den cirkelskiva som ligger på avståndet z från xy-planet. Den har massan $\mathrm{d}m$ och tjockleken $\mathrm{d}z$. Tröghetsmomentet för bara denna cirkelskiva är enligt Steiners sats:

$$\mathrm{d}I_x = \frac{\mathrm{d}m \cdot R^2}{4} + \mathrm{d}m \cdot z^2$$

Här har vi utgått ifrån att tröghetsmomentet för en cirkelskiva med avseende på en diameter är känt (beräkningen är gjord i bokens teoriavsnitt).

För hela cylindern fås då: $I_x = \int \mathrm{d}I_x = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \mathrm{d}m$

För masselementet gäller: $\mathrm{d}m = \rho \cdot \pi R^2 \mathrm{d}z = \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \pi R^2 \mathrm{d}z = \frac{m}{h} \mathrm{d}z$

Insättning ger

$$I_x = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \mathrm{d}m = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \frac{m}{h} \mathrm{d}z = \frac{m}{h} \left[\frac{R^2}{4} z + \frac{z^3}{3} \right]_0^h \qquad \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{m}{h} \int_0^h \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \mathrm{d}z = \frac{m}{h} \left[\frac{R^2}{4} z + \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{m}{h} \left(\frac{R^2}{4} h + \frac{h^3}{3} \right) = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right)$$

Om $R \to 0$ så $I_x \to \frac{mh^2}{3}$ (smal stång).

Om $h \to 0$ så $I_x \to \frac{mR^2}{4}$ (tunn cirkelskiva).

LP 3.11 Inlämningsuppgift på T just nu

LP 3.12 *Om* det hade varit en *hel* cirkelring med massan m och radien r vet vi att tröghetsmomentet med avseende på symmetriaxeln enligt definitionen är $I_z = mr^2$. Massfördelningen är tunn och plan och då gäller satsen om tunna skivor:

$$I_x + I_y = I_z$$

Då $I_x = I_y$ på grund av symmetri för en sådan hel cirkelring fås

$$2I_x = I_z \qquad \Rightarrow \qquad I_x = \frac{mr^2}{2}$$

Det är bara massans avstånd från axeln som är av betydelse för tröghetsmomentet. Det spelar alltså ingen roll om vi viker den hela cirkelbågen längs x-axeln så att vi får en halv cirkelbåge. Tröghetsmomentet blir oförändrat dvs

$$I_x = \frac{mr^2}{2}$$

b) I fortsättningen gäller det tröghetsmoment med avseende på axlar parallella med z-axeln. Vi vet för halvcirkelbågen att $I_O = mr^2$. Halvcirkelbågens masscentrum har koordinaten $y_G = \frac{2r}{\pi}$.
Steiners sats ger

$$I_G = I_O - m{y_G}^2$$

$$I_A = I_G + m(r - y_G)^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_A = I_O - m{y_G}^2 + m(r - y_G)^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_A = mr^2 - m{y_G}^2 + m\left(r^2 - 2ry_G + {y_G}^2\right) \quad \Rightarrow \quad I_A = 2mr^2 - 2mry_G \quad \Rightarrow$$

$$I_A = 2mr^2 - 2m\frac{2r^2}{\pi} \qquad \Rightarrow \quad I_A = 2m\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)r^2$$